Elementos de Probabilidad y Estadística

Respuestas Primer Examen Parte 1

1. (**3 ptos.**) Considere una colección de n bolas de las cuales $r, 3 \leq r < n/2$ son blancas y el resto son negras. Seleccionamos tres bolas al azar sin reposición.

   a) Describa el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ asociado a este experimento.

   b) Sea $A_i =$ 'la bola i es blanca' para $i = 1, 2, 3$. Liste los eventos elementales que pertenecen a los siguientes conjuntos y calcule sus probabilidades:

   i) $A_1 \cup A_2^c$; ii) $(A_1 \cup A_2^c) \cap A_3$; iii) $(A_1^c \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)$.

   Respuesta. a) Un posible modelo para este experimento consiste de los vectores (x, y, z) donde las componentes x, y, z toman los valores b o n según la bola correspondiente haya sido blanca o negra. Como para componente hay dos valores y son tres componentes, el espacio muestral tiene $2^3 = 8$ elementos:

$$\Omega = \{(b,b,b); (b,b,n); (b,n,b); (b,n,n); (n,b,b); (n,b,n); (n,n,b); (n,n,n)\}$$

   Como σ-álgebra podemos tomar al conjunto de partes de Ω: $\mathcal{P}(\Omega)$, que es el conjunto de todos los subconjuntos de Ω. Para hallar la probabilidad P asociada a este experimento, hay que tener en cuenta que las extracciones se hacen sin reposición, y que basta con hallar la probabilidad asociada a cada eventos elemental, pues la probabilidad de un evento se puede calcular luego sumando las probabilidades de los eventos elementales que lo integran.

   Tenemos

$$\begin{aligned}
P((b,b,b)) &= \frac{r(r-1)(r-2)}{n(n-1)(n-2)} \\
P((b,b,n)) = P((b.n,b)) = P((n,b,b)) &= \frac{r(r-1)(n-r)}{n(n-1)(n-2)} \\
P((b,n,n)) = P((n.n,b)) = P((n,b,n)) &= \frac{r(n-r)(n-r-1)}{n(n-1)(n-2)} \\
P((n,n,n)) &= \frac{(n-r)(n-r-1)(n-r-2)}{n(n-1)(n-2)}
\end{aligned}$$

   b) El conjunto $A_1 \cup A_2^c$ contiene a los vectores que tienen b en el primer lugar o n en el segundo:

$$A_1 \cup A_2^c = \{(b,b,b); (b,b,n); (b,n,b); (b,n,n); (n,n,b); (n,n,n)\}$$

   También podemos obtener este resultado observando que $(A_1 \cup A_2^c) = (A_1^c \cap A_2)^c$ y $(A_1^c \cap A_2) = \{(n,b,b); (n,b,n)\}$. Usando esta última relación tenemos

$$\begin{aligned}
P(A_1 \cup A_2^c) &= 1 - P(A_1^c \cap A_2) = 1 - P((n,b,b,); (n,b,n)) \\
&= 1 - \frac{r(r-1)(n-r)}{n(n-1)(n-2)} - \frac{r(n-r)(n-r-1)}{n(n-1)(n-2)} = 1 - \frac{r(n-r)}{n(n-1)}
\end{aligned}$$

De manera similar tenemos

$$\begin{aligned}(A_1 \cup A_2^c) \cap A_3 &= (A_1 \cap A_3) \cup (A_2^c \cap A_3) \\ &= \{(b,b,b);(b,n,b)\} \cup \{(b,n,b);(n,n,b)\} \\ &= \{(b,b,b);(b,n,b);(n,n,b)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P((A_1 \cup A_2^c) \cap A_3) &= P((b,b,b)) + P((b,n,b)) + P((n,n,b)) \\ &= \frac{r(r-1)(r-2)}{n(n-1)(n-2)} + \frac{r(r-1)(n-r)}{n(n-1)(n-2)} + \frac{r(n-r)(n-r-1)}{n(n-1)(n-2)} \\ &= \frac{r[(r-1)(r-2)+(n-r)(n-r-1)+(r-1)(n-r)]}{n(n-1)(n-2)} \\ &= \frac{r[(r-1)(n-2)+(n-r)(n-r-1)]}{n(n-1)(n-2)}\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}(A_1^c \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3) &= \{(n,b,b);(n,n,b)\} \cup \{(b,b,b);(n,b,b)\} \\ &= \{(b,b,b);(n,n,b);(n,b,b)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P((A_1^c \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3) &= P((b,b,b)) + P((n,n,b)) + P((n,b,b)) \\ &= \frac{r(r-1)(r-2)}{n(n-1)(n-2)} + \frac{r(n-r)(n-r-1)}{n(n-1)(n-2)} + \frac{r(r-1)(n-r)}{n(n-1)(n-2)} \\ &= \frac{r[(r-1)(r-2)+(n-r)(n-r-1)+(r-1)(n-r)]}{n(n-1)(n-2)} \\ &= \frac{r[(r-1)(n-2)+(n-r)(n-r-1)]}{n(n-1)(n-2)}\end{aligned}$$

2. (**2 ptos.**) Una caja contiene 100 bolas numeradas del 1 al 100. Se seleccionan al azar dos bolas sin reposición. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números sea par? ¿Cuál es la probabilidad de que el producto sea par?

   Respuesta. Para que la suma sea par, o bien ambos números son pares o ambos son impares. Hay 50×49 maneras de escoger dos números pares (o dos números impares) y hay en total 100×99 maneras de escoger dos números. Por lo tanto la probabilidad que buscamos es

$$2\frac{50 \times 49}{100 \times 99} = \frac{49}{99} \approx 0.495$$

   Por otro lado, para que el producto sea par, al menos uno de los dos números debe ser par. Por lo tanto, la probabilidad que buscamos es 1 menos la probabilidad de que ninguno sea par (ambos sean impares). Esto es

$$1 - \frac{50 \times 49}{100 \times 99} = \frac{149}{198} \approx 0.753$$

3. (**2 ptos.**) Se colocan cinco bolas blancas y cinco negras en 3 cajas numeradas. ¿Cuántas maneras hay de hacer esto?

Respuesta.

Usando el principio de multiplicación, podemos calcular el número de maneras que tenemos de distribuir cinco bolas blancas en las tres cajas, y multiplicarlo por el número de maneras que tenemos de distribuir las cinco bolas negras en las tres cajas.

Vimos en clase (pag. 40 de las notas) que el problema de distribuir cinco bolas blancas en tres cajas es equivalente al problema de colocar cinco símbolos $\bigcirc$ y dos símbolos $|$ en siete lugares. Por ejemplo,

$$\bigcirc\bigcirc\bigcirc\,|\,\bigcirc\bigcirc\,|$$

representa una configuración en la cual hay tres bolas blancas en la primera caja, dos en la segunda y ninguna en la tercera. Por lo tanto, buscamos el número de maneras que hay de colocar las dos barras verticales en los siete lugares disponibles, y esto es

$$\binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21.$$

Como el problema de colocar las cinco bolas negras en las tres cajas es idéntico, tenemos también 21 maneras de hacer esto. En total hay

$$21 \cdot 21 = 441$$

maneras de colocar las bolas blancas y negras en las tres cajas.

4. (**3 ptos.**) Se extrae una bola de una caja que contiene cuatro blancas y dos negras. Si la bola es blanca se la deja fuera de la caja, mientras que si es negra se la vuelve a colocar dentro. Extraemos luego otra bola. Sea A el evento 'la primera bola es blanca' y $B =$ 'la segunda bola es blanca'. Diga si las siguientes proposiciones son ciertas o falsas:
a) $P(A) = 2/3$
b) $P(B) = 3/5$
c) $P(B|A) = 3/5$
d) $P(A|B) = 9/14$
e) Los eventos A y B son disjuntos.

Demostraciión.

a) Cierta: $P(A) = 4/6 = 2/3$.

b) Falsa: Usando la ley de la probabilidad total,

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{28}{45}$$

c) Cierta: Si la primera bola extraída es blanca, la dejamos y para la próxima extracción sólo quedan 3 bolas blancas de cinco.

d) Cierta: Usando la definición de probabilidad condicional

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2/5}{28/45} = \frac{9}{14}$$

e) Falso. Es posible extraer dos bolas blancas con este esquema.