Elementos de Probabilidad y Estadística
Problemas IX

Los problemas 1 y 2 son para entregar el miércoles 29/04/14.

1. **Las cajas de cerillos de Banach.** Una persona tiene dos cajas de n cerillos, una en el bolsillo derecho y otra en el izquierdo. Cuando necesita un cerillo escoge una caja al azar hasta que se encuentra una caja vacía. ¿Cuál es la probabilidad de que la otra caja tenga k cerillos? (El celebre matemático polaco Stefan Banach solía reunirse con otros matemáticos en el Café Escocés en Lwów, Polonia, en donde había un cuaderno en el cual se anotaban los problemas planteados y sus soluciones. Esta libreta se conoce como el Libro Escocés. El problema anterior es el último problema incluido en este libro).

2. Sea F la función de distribución dada por $F(x) = \frac{1}{4}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{[1,\infty)}(x)+\frac{1}{4}\mathbf{1}_{[2,\infty)}(x)$ y sea P la probabilidad asociada a esta distribución. Calcule la probabilidad de los siguientes eventos:

   a) $A = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ b) $B = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ c) $C = (-\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ d) $D = [0, 2)$ e) $E = (3, \infty)$.

3. Cierta característica genética (por ejemplo el color del pelo) se transmite a través de un gen, y denotamos por D a un gen dominante y por d a uno recesivo. Cada persona recibe la mitad de sus genes de la madre y la otra mitad del padre. La configuración de genes DD es puramente dominante, dd es puramente recesiva y Dd es híbrida. Los individuos con genes DD y Dd tienen igual apariencia externa (mismo color del pelo, por ejemplo). Suponemos que una pareja en la que ambos son híbridos tiene cuatro hijos. ¿Cuál es la probabilidad de que tres de los cuatro tengan la apariencia del gen dominante?

4. Lanzamos seis monedas balanceadas al aire. Halle la función de probabilidad y la función de distribución para la variable que indica el número de Soles.

5. Determine el valor de la constante A para que las siguientes sean funciones de probabilidad.

   a) $P(X = i) = \begin{cases} Ai & i = 1, 2, \dots, n \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$ b) $P(X = i) = \begin{cases} A/2^i & i = 1, 2, \dots, n \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

   c) $P(X = i) = \begin{cases} A/3^i & i = 1, 3, 5, 7, \dots, 2n-1 \\ A/4^i & i = 2, 4, 6, 8, \dots, 2n \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

6. ¿Para qué valores de C y α es la función p definida por $p(n) = Cn^\alpha$ para $n \in \mathbb{N}$ una función de probabilidad?

7. Halle la función de probabilidad de la variable aleatoria X si su función de distribución F está dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{para } 0 \le x < \frac{1}{4}, \\ \frac{3}{4} & \text{para } \frac{1}{4} \le x < \frac{3}{4}, \\ 1 & \text{para } \frac{3}{4} \le x. \end{cases}$$

8. Una caja tiene 10 bolas numeradas del 1 al 10. Seleccionamos dos bolas al azar con reposición de la caja. Sea X el mayor de los dos números, calcule la función de probabilidad de X. Resuelva también este problema para el caso de muestreo sin reposición.

9. Una compañía produce ruedas para maletas y sabe que la probabilidad de producir una rueda defectuosa es de 1 %. La compañía vende las ruedas en paquetes de 10 y ofrece reemplazar el paquete si dos o más ruedas son defectuosas y además dar una compensación monetaria al cliente. (a) ¿Cuál es la probabilidad de que esto ocurra? (b) Halle esta probabilidad usando la aproximación con la distribución de Poisson y compare con el resultado exacto.

10. Un sistema de comunicaciones consiste de n componentes, los cuales funcionan de manera independiente con probabilidad p. El sistema puede funcionar adecuadamente si al menos la mitad de las componentes operan. ¿Para cuáles valores de p un sistema con cinco componentes tiene mayor probabilidad de funcionar que un sistema con tres componentes?

11. Suponga que en cierta zona de México los terremotos ocurren de acuerdo a un proceso de Poisson con intensidad $\lambda = 2$ terremotos por semana. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran al menos tres terremotos en la próxima semana?

12. Antonio dice que es capaz de distinguir entre dos refrescos de naranja, que llamaremos M y N. Beatriz piensa que Antonio solamente adivina y lo reta a una prueba. Antonio debe probar 10 muestras y si acierta 8 o más gana la apuesta. ¿Cuál es la probabilidad de que Antonio gane la apuesta si adivina el resultado? ¿Cuál es la probabilidad de que gane si es capaz de distinguir entre los refrescos con probabilidad de 0.9?

13. En baseball se dice que un bateador 'hace una escalera' si logra batear un hit, un doble, un triple y un home run en un juego. Supongamos que estos cuatro tipos de hits tienen probabilidad 1/6, 1/20, 1/120 y 1/24, respectivamente. Halle la probabilidad de que un bateador haga una escalera si en un juego tiene oportunidad de batear (a) cuatro veces, (b) cinco veces.

14. Un vendedor de seguros tiene dos citas con clientes. En la primera cita puede vender un seguro con probabilidad 0.4, mientras que en la segunda esta probabilidad es de 0.6. En estas ventas, con igual probabilidad logra vender un seguro básico, que cuesta 5,000 pesos o un plan integral, que cuesta 10,000 pesos. Halle la función de probabilidad de la venta total del día.

15. Un examen de múltiple selección tiene tres respuestas posibles para cada una de las cinco preguntas que forman el examen. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que responde al azar logre obtener cuatro o más respuestas correctas?

16. Una persona dice tener poderes extrasensoriales y para probarlo se lanza una moneda10 veces y la persona debe adivinar el resultado en cada lanzamiento. La persona logra adivinar 7de los 10 resultados. ¿Cuál es la probabilidad de haber obtenido al menos 7 resultados correctos si la persona no tiene poderes extrasensoriales?

17. Una mano de bridge tiene 13 cartas. Sea X el número de 'honores' (10, J, Q, K, A) presentes en la mano. Halle la función de probabilidad y la función de distribución de esta variable.

18. Determine el valor que debe tomar la constante A en cada caso para que las siguientes funciones sean densidad de una función de distribución. a. $f(x) = Ae^{-\alpha|x-\theta|},\ -\infty < x < \infty,\ \alpha$ y θ constantes. b. $f(x) = Ax^{\alpha+1},\ x > x_0 > 0,\ \alpha$ constante. c. $f(x) = Ax(1-x),\ 0 \leq x \leq 1$. d. $f(x) = \frac{A}{1+x^2},\ -\infty < x < \infty$.

19. Sea $f(x) = Cxe^{-x},\ x > 0$ una densidad.

    a. Determine el valor de C. b. Calcule $P(X < 2)$. c. Calcule $P(2 < X < 3)$.

20. Halle la función de distribución F y su gráfica si la densidad es

    a. $f(x) = 1/2,\ 0 \leq x \leq 2$. b. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & \text{si } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$

21. Si $f(x) = \frac{1}{2}e^{-x/2},\ x > 0$, halle un número x_0 tal que $P(X > x_0) = 1/2$.

22. Sea X una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro $\lambda = 0.5$. Calcule

    a. $P(X > 1)$, b. $P(0.5 < X < 1.5)$, c. $P(X > 2|X > 1)$.

23. La vida de una máquina, medida en horas, tiene densidad $f(x) = C/x^2,\ x > 100$.

    a. Calcule C. b. Halle la función de distribución. c. Calcule $P(X > 500)$.

24. Verifique que las siguientes funciones son densidades y obtenga la función de distribución correspondiente.

    a) $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{para } 0 < x < \pi/2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ b. $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-x^2) & \text{para } |x| < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$.

25. Sea X una variable aleatoria con valores en $[0,1]$ y función de distribución $F(x) = x^2$. ¿Cuál es la densidad de X? Calcule las siguientes probabilidades:

    a) $P(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4})$, b) $P(X > 1/2)$, c) $P(X \leq 3/4|X > 1/2)$.