Elementos de Probabilidad y Estadística
Problemas II

Los problemas 10, y 22 son para entregar el miércoles 19/02/14.

1. ¿Cuándo son ciertas las siguientes relaciones?

   a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   b. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
   c. $A \cup (B \cup C) = A \setminus (B \setminus C)$
   d. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$
   e. $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$
   f. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
   g. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

2. Sean $P_1, \ P_2$ dos medidas de probabilidad definidas sobre la misma σ-álgebra $\mathcal{F}$ y sea $0 \leq \alpha \leq 1$. Demuestre que $\alpha P_1 + (1-\alpha)P_2$ también es una medida de probabilidad sobre $\mathcal{F}$. Generalice el resultado a n medidas de probabilidad.

3. a. Sea $p_i = a/i^2$ para $i \in \mathbb{N}$. Halle el valor de a para que p_i defina una probabilidad.

   b. Sea $p_i = b/i^2$ para $i = \pm 1, \pm 2, \dots$. Halle el valor de b para que p_i defina una probabilidad.

4. Para comenzar un cierto juego es necesario lanzar un 6 con un dado.

   a. ¿Cuál es la probabilidad de lanzar el primer 6 en el tercer intento?

   b. ¿Cuál es la probabilidad de necesitar más de tres intentos?

   c. ¿Cuántos lanzamientos hacen falta para que la probabilidad de haber lanzado un 6 sea al menos 0.95?

   d. ¿Cuál es la probabilidad de que el primer 6 ocurra en un número par de lanzamientos?

5. Sean: $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{B}$ la familia de conjuntos de Borel y P la probabilidad definida en el ejemplo sobre el error de redondeo.

   a. Probar que $P(\{\omega\}) = 0$, donde $\{\omega\}$ es el subconjunto de Ω que consta sólo del punto ω. (Verificar previamente que $\{\omega\} \in \mathcal{B}$).

   b. Sean $Q = \{\omega : \omega \in [0,1] \text{ es racional}\}$ e $I = \{\omega : \omega \in [0,1] \text{ es irracional}\}$. Probar que $P(Q) = 0$ y $P(I) = 1$.

6. Se lanza reiteradamente una moneda balanceada. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran 4 caras antes que dos sellos?

7. Escogemos al azar un número entero entre 1 y 120. Calcule la probabilidad de que el número escogido sea divisible por 4 o por 6.

8. Se lanzan cuatro dados y se multiplican los números que se obtienen. ¿Cuál es la probabilidad de que este producto sea divisible por 5? ¿Cuál es la probabilidad de que el último dígito en el producto sea 5?

9. Antonio y Bruno acuerdan una competencia de esgrima en una serie de mangas de modo que el primero en ganar dos mangas seguidas gana el combate. Antonio tiene probabilidad p de ganar una manga y Bruno probabilidad $q = 1 - p$. ¿Cuál es la probabilidad de que la competencia termine al cabo de k mangas?

10. En una caja tenemos n bolas con los números del 1 al n. Sea D_r el evento: 'se extrae una bola al azar y el número es divisible por r'. Halle $P(D_3), \ P(D_4), \ P(D_3 \cup D_4)$ y $P(D_3 \cap D_4)$ y obtenga los límites de estas probabilidades cuando $n \to \infty$.

11. Demuestre que la intersección de cualquier colección de σ-álgebras de subconjuntos de un espacio Ω es también una σ-álgebra. ¿es cierto esto para la unión?

12. Definimos la función d sobre $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ por $d(A,B) = P(A\Delta B)$.

    a. Demuestre que para cualesquiera eventos $A, \ B$ y C

$$d(A,B) + d(B,C) - d(A,C) = 2P(A \cap B^c \cap C) + P(A^c \cap B \cap C^c)$$

b. ¿Cuándo vale $d(A,B)=0$?

c. Sea $A_1, A_2, \ldots$ una sucesión no-decreciente de eventos: $A_i \subseteq A_j$ para $i \leq j$. Demuestre que para $i \leq j \leq k$,

$$d(A_i, A_k) = d(A_i, A_j) + d(A_j, A_k).$$

13. ¿Cuántas diagonales tiene un polígono convexo de n lados?

14. En el juego de 'craps' el jugador lanza dos dados. Si el resultado es 7 u 11, el jugador gana. Si es 2, 3 ó 12, pierde. Si es cualquier otro resultado k, continúa lanzando hasta obtener un 7, en cuyo caso pierde, o k, en cuyo caso gana. ¿Cuál es un espacio muestral adecuado para este juego? ¿Cuál es la probabilidad de ganar? ¿Cuál es la probabilidad de ganar en el primero o segundo lanzamiento? ¿Cuál es la probabilidad de ganar si el primer lanzamiento es 6?

15. a. ¿De cuántas maneras podemos escoger un comité de tres personas en un grupo de 20?

    b. ¿De cuántas maneras podemos escoger un presidente, un secretario y un tesorero?

16. Hay N niñas y N niños en una fiesta.

    a. ¿Cuántas parejas de baile de sexos distintos pueden formarse?

    b. ¿De cuántas maneras se pueden colocar en una fila de modo que los sexos se alternen?

17. Un examen tiene 12 preguntas que pueden ser respondidas *cierto* o $falso$. Si un estudiante decide responder *cierto* a seis de ellas, ¿de cuántas maneras puede hacerlo?

18. Con las letras de la palabra LIBRO, ¿Cuántas palabras de cinco letras o menos (con o sin sentido) pueden formarse? ¿Cuántas de ellas no tienen letras repetidas?

19. Calcule cuantas palabras con o sin sentido pueden formarse con las letras de las siguientes palabras. En cada caso calcule también cuantas no tienen letras repetidas.

    CUAUTITLAN, CUERAMARO, TLALNEPLANTLA TLACOQUEMECATL.

20. Se disponen 5 bolas blancas y 5 negras en 3 cajas numeradas. ¿Cuántas maneras hay de hacerlo?

21. ¿Cuántos números se pueden formar usando todos los dígitos 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4?

22. En una mesa de un restaurant seis personas ordenan arrachera, tres piden enchiladas, dos piden pollo y uno pide pasta.

    a. ¿De cuántas maneras pueden servirse los 12 platillos de modo que todos reciban lo que ordenaron?

    b. ¿De cuántas maneras pueden servirse de modo que nadie reciba lo que ordenó?

23. Una mano de POKER consiste de cinco cartas tomadas de un juego de barajas. ¿De cuántas maneras se puede obtener

    a. una escalera (cinco cartas en orden, sin importar la pinta; el As puede terminar la escalera pero no comenzarla)?

    b. un trío?

    c. un par?

    d. dos pares?

    e. un par y un trio (full house)?

    f. un poker (cuatro cartas iguales)?

24. ¿Cuál es la probabilidad de que cuatro personas seleccionadas al azar hayan nacido en diferentes dias de la semana?

25. Se disponen en fila 2 bolas blancas y 6 bolas negras de modo que no haya dos bolas blancas consecutivas (la figura indica una manera posible). ¿Cuántas maneras hay de hacerlo?

● ● ○ ● ○ ● ● ●