Elementos de Probabilidad y Estadística
Problemas I

Los problemas 7 y 22 son para entregar el miércoles 5/02/14.

1. Sean A_1, A_2 y A_3 eventos de un espacio muestral. Expresar mediante uniones, intersecciones y complementos los siguientes eventos:
   a. Los tres eventos ocurren.
   b. Ocurre sólo A_1.
   c. Ocurren A_1 y A_2, pero no A_3.
   d. Ocurre al menos uno de los tres eventos.
   e. No ocurre ninguno.
   f. Ocurren al menos dos.
   g. Ocurren dos y no más.

2. Expresar como uniones disjuntas a) $A_1 \cup A_2$; b) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$; c) $\bigcup_{i=1}^n A_i$.

3. Sea $\Omega = \{AAA, AAS, ASA, SAA, ASS, SAS, SSA, SSS\}$, donde A es águila y S es sol. Describa con palabras los siguientes eventos y calcule sus probabilidades:
   a. $B = \{AAA, AAS, ASA, ASS\}$;
   b. $C = \{AAA, SSS\}$.
   c. $D = \{AAS, ASA, SAA\}$;
   d. $E = \{AAS, ASA, SAA, ASS, SAS, SSA\}$.

4. El evento $A \setminus B$ quiere decir que A ocurre pero B no. Demuestre que las operaciones de unión, intersección y complemento se pueden expresar usando sólo esta operación.

5. Demuestre que para cualesquiera conjuntos A, B, C y D, la siguiente proposición es cierta:
$$(A \cup B) \setminus (C \cup D) \subseteq (A \setminus C) \cup (B \setminus D).$$

6. Sea A, B, C, D subconjuntos de Ω. Demuestre las siguientes propiedades.
   a. $((A \cap B) \cup (C \cap D))^c = (A^c \cup B^c) \cap (C^c \cup D^c)$;
   b. $A \triangle \Omega = A^c$.
   c. $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) \cap (A^c \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = \emptyset$;
   d. $A \setminus B = A \cap (A \triangle B)$.
   e. $A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B)$;
   f. $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$.
   g. $(A \cap B^c) \triangle (B \cap A^c) = A \triangle B$;
   h. $A \triangle B = C \triangle D \Rightarrow A \triangle C = B \triangle D$.
   i. $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$;
   j. $A \triangle B = (A \triangle C) \triangle (C \triangle B)$.

7. Sean A, B y C tres eventos. Demuestre las siguientes propiedades:
   a. $P(A \cap B) + P((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) + P(A^c \cap B^c) = 1$.
   b. $P(A^c \cap B^c) + P(A) + P(A^c \cap B) = 1$.
   c. $P(A^c \cap B^c \cap C^c) + P(A) + P(A^c \cap B) + P(A^c \cap B^c \cap C) = 1$.
   d. $P(A \cap B) - P(A)P(B) = P(A^c \cap B^c) - P(A^c)P(B^c)$.

8. Suponga que $P(A) \geq 0{,}9$, $P(B) \geq 0{,}8$ y $P(A \cap B \cap C) = 0$, demuestre que $P(C) \leq 0{,}3$.

9. Demuestre que si $A \cap B \cap C = \emptyset$, entonces
$$P((A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)) = P(A \cap B) + P(B \cap C) + P(C \cap A).$$

10. Sea D el evento 'exactamente uno de los eventos A, B y C ocurre'. Exprese $P(D)$ en términos de $P(A), P(B)$, $P(C)$, $P(A \cap B), P(A \cap C), P(B \cap C)$ y $P(A \cap B \cap C)$.

11. Demuestre que: a. $\min\{1, P(A) + P(B)\} \geq P(A \cup B) \geq \max\{P(A), P(B)\}$
    b. $\min\{P(A), P(B)\} \geq P(A \cap B) \geq \max\{0, P(A) + P(B) - 1\}$
    c. $P(\cap_1^n A_i) \geq \sum_1^n P(A_i) - (n-1)$.

12. La condición de σ-aditividad para una medida de probabilidad es equivalente a otras propiedades. Pruebe que es equivalente a las proposiones (a) y (b):
    a. Si $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$ es una sucesión creciente de eventos y $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots$ entonces $P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.
    b. Si $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ es una sucesión decreciente de eventos y $A = A_1 \cap A_2 \cap \cdots$ entonces $P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.

13. Un experimento consiste de tomar al azar tres focos de la producción de una fábrica y probarlos, con resultados posibles defectuoso (1) o bueno (0). Sea A el evento 'El primer foco es defectuoso', B el evento 'el segundo foco es defectuoso' y C el evento 'el tercer foco es defectuoso'.

    a) Describa el espacio muestral Ω para este experimento.

    b) Liste los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos: A, B, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cup B \cup C$, $A \cap B$, $A^c \cap B \cap C^c$, $A \cap B^c \cap C$, $(A \cup B^c) \cap C$, $(A^c \cap C) \cup (B \cap C)$.

14. Describa en detalle un espacio muestral para los siguientes experimentos: (a) Tres lanzamientos de un dado. (b) Calificaciones de una clase de 20 estudiantes en un examen. (c) Medición de la temperatura a mediodía en una estación meteorológica. (d) Medición de las velocidades de carros pasando por un punto dado. (e) Una sucesión infinita de lanzamientos de una moneda.

15. Una caja contiene n bolas rojas y n bolas blancas. Se extraen dos bolas al azar. ¿Cuál es el espacio muestral para este experimento? ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas tengan colores distintos? Halle la probabilidad p_n de que las bolas sean del mismo color y evalúe $\lim_{n\to\infty} p_n$.

16. En una bolsa hay tres cartas numeradas 1, 2 y 3. Sacamos las cartas al azar sucesivamente y sin reposición. El resultado es una permutación de los números 1, 2 y 3. Describa el espacio muestral de este experimento. Para cada una de las siguientes descripciones, liste los elementos correspondientes y calcule la probabilidad del evento.

    (a) El 2 sale en primer lugar. (b) El 3 sale en segundo lugar. (c) El 2 sale en primer lugar y el 1 en tercer lugar. (d) O bien el 2 sale en primer lugar o bien el 1 sale en tercer lugar (o ambos). (e) Ningún número ocupa su lugar.

17. Repita el ejercicio anterior con 4 cartas numeradas de 1 a 4.

18. Una caja contiene 10 bolas negras y 5 bolas rojas. Se extraen 3 bolas al azar, con reposición. Calcular:

    a. La probabilidad de que sean 2 negras y una roja. b. La probabilidad de que sean las tres negras.

19. Repetir el ejercicio anterior suponiendo que la extracción es sin reposición.

20. Se extraen dos cartas sucesivamente de un juego de 52 cartas. Halle la probabilidad de que la segunda carta sea mayor que la primera.

21. Se lanzan al aire simultáneamente tres monedas balanceadas. Calcular:

    a. La probabilidad de obtener 3 aguilas. b. La probabilidad de obtener por lo menos 2 aguilas.

22. Lanzamos una moneda balanceada cuatro veces. Describa un espacio de probabilidad para modelar este experimento y calcule la probabilidad de los siguientes eventos:

    a. Ocurren al menos tres aguilas. b. Ocurren exactamente tres aguilas.
    c. Ocurren al menos tres aguilas consecutivas. d. Ocurren exactamente tres aguilas consecutivas.

23. Se lanzan dos dados. Calcule la probabilidad de los siguientes eventos: a) obtenemos el mismo número en ambos dados; b) la suma es 7 u 11; c) los números son primos relativos, d) la suma es impar; e) el producto es impar; f) un número divide al otro.

24. Se realiza un test de conocimientos con 11 preguntas a contestar por *sí* o *no*. Se da por aprobada la prueba si se contestan correctamente al menos 6 de las 11 preguntas. ¿Cuál es la probabilidad de aprobar el examen contestando al azar?

25. Sea $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de eventos en un espacio finito. Demuestre que $\mathcal{F}$ no puede contener exactamente 6 eventos. ¿Qué enteros pueden ser el cardinal de $\mathcal{F}$?