Elementos de Probabilidad y Estadística

Tercer Examen

Respuestas

Lunes, 7 de junio de 2010, 10 a.m. a 1 p.m.

1. (**3 ptos.**)

   a) Defina independencia para dos variables aleatorias.

   b) Sean X, Y dos variables aleatorias, $F_{X,Y}(x,y)$ su función de distribución conjunta, $F_X(x)$ y $F_Y(y)$ las funciones de distribución marginales. Demuestre que X e Y son independientes si y sólo si
   $$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$$

   c) Considere dos eventos A y B tales que $P(A) = 1/4$, $P(B|A) = 1/2$ y $P(A|B) = 1/4$. Definimos las variables X e Y por $X = \mathbf{1}_A$, $Y = \mathbf{1}_B$, donde $\mathbf{1}_E(\omega)$ vale 1 si $\omega \in E$ y vale 0 si $x \notin E$. Diga si las siguientes proposiciones son ciertas o falsas.

   i) Las variables aleatorias X e Y tienen la misma distribución.

   ii) Las variables aleatorias X e Y son independientes.

   iii) $P(X^2 + Y^2 = 1) = 1/4$.

   iv) $P(XY = X^2Y^2) = 1/2$.

   v) $P(X + Y = 0) = 1/4$.

<u>Solución</u>.
a) y b) Ver notas del curso.
c) i) **Falso.** Tenemos $P(X = 1) = P(A) = 1/4$, $P(X = 0) = 1 - P(X = 1) = 3/4$. Para hallar la distribución de Y necesitamos calcular la probabilidad de B:

$$\frac{1}{2} = P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{2}P(A) = \frac{1}{8},$$

$$\frac{1}{4} = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/8}{P(B)} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{2}.$$

En consecuencia $P(Y = 1) = P(B) = 1/2$, $P(Y = 0) = 1 - P(Y = 1) = 1/2$, y vemos que estas variables no tienen la misma distribución.
ii) **Cierto.** Para ver que X e Y son independientes hay que ver que

$$P(X = i, Y = j) = P(X = i)P(Y = j) \tag{1}$$

para $i, j = 0, 1$, es decir, en principio hay que verificar cuatro relaciones. Observamos que $\{X = 1\} = A$ y $\{X = 0\} = A^c$. Otro tanto ocurre con Y y B. Usando esto vemos que las cuatro relaciones (1) equivalen a demostrar las siguientes cuatro relaciones entre los conjuntos: A y B son independientes, A^c y B son independientes, A y B^c son independientes, A^c y B^c son independientes. Pero vimos en el curso que si A y B son independientes, también los son A y B^c; A^c y B; A^c y B^c. Por lo tanto basta ver que A y B son independientes. Una manera sencilla de ver esto es observar que $P(A|B) = 1/4 = P(A)$. Si queremos verificar que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = P(A)P(B)$$

de modo que A y B son independientes.
iii) **Falso.** Observamos que

$$\{X^2 + Y^2 = 1\} = \{X + Y = 1\} = \{X = 1, Y = 0\} \cup \{X = 0, Y = 1\}$$

y estos eventos son disjuntos. Calculamos la probabilidad de cada uno de ellos y las sumamos:

$$P(X = 1, Y = 0) = P(A \cap B^c) = P(A \setminus (A \cap B)) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}.$$

$$P(X = 0, Y = 1) = P(A^c \cap B) = P(B \setminus (A \cap B)) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$

Finalmente

$$P(X^2 + Y^2 = 1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$$

iv) **Falso.** X e Y sólo toman valores 0 ó 1, de modo que el producto XY sólo puede tomar esos mismos valores, y por lo tanto $XY = X^2Y^2$ siempre, es decir $P(XY = X^2Y^2) = 1$.
v) **Falso.** Calculamos primero $P(A \cup B)$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

$$P(X + Y = 0) = P(X = 0, Y = 0) = P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = \frac{3}{8}.$$

---

2. (**3 ptos.**)

   Una caja contiene 5 bolas numeradas del 1 al 5. Sacamos dos bolas sucesivamente y sin reposición. Sea X el menor de los dos números e Y el mayor.

   a) Determine la distribución (o la función de probabilidad) conjunta de X, Y.

   b) Halle las distribuciones (o las funciones de probabilidad) marginales y determine si las variables son independientes.

   c) Halle el valor esperado y la varianza de X e Y y calcule la covarianza y correlación entre ellas.

Solución.

a) y b) La siguiente tabla muestra la función de probabilidad conjunta. Las marginales se muestran en la última fila y última columna de la tabla.

		Y 2	3	4	5	
	1	1/10	1/10	1/10	1/10	4/10
	2	0	1/10	1/10	1/10	3/10
X	3	0	0	1/10	1/10	2/10
	4	0	0	0	1/10	1/10
		1/10	2/10	3/10	4/10	

Tabla 1

Vemos que los valores en la tabla no son el producto de las marginales y por lo tanto las variables no son independientes.

c) Comenzamos por el valor esperado

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \frac{1}{10}\big(1\times 4 + 2\times 3 + 3\times 2 + 4\times 1\big) = 2, \\ \mathrm{E}(Y) &= \frac{1}{10}\big(2\times 1 + 3\times 2 + 4\times 3 + 5\times 4\big) = 4. \end{aligned}$$

De manera similar calculamos los momentos de orden 2:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X^2) &= \frac{1}{10}\big(1^2\times 4 + 2^2\times 3 + 3^2\times 2 + 4^2\times 1\big) = 5, \\ \mathrm{E}(Y^2) &= \frac{1}{10}\big(2^2\times 1 + 3^2\times 2 + 4^2\times 3 + 5^2\times 4\big) = 17. \end{aligned}$$

Las varianzas son:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2 = 5 - 4 = 1, \\ \mathrm{Var}(Y) &= \mathrm{E}(Y^2) - (\mathrm{E}(Y))^2 = 17 - 16 = 1. \end{aligned}$$

Para la covarianza usamos la fórmula $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$. Calculamos a continuación el primer término. Los posibles valores del producto son 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15 y 20, cada uno con probabilidad 1/10 de ocurrir. Por lo tanto el valor esperado del producto es la suma de estos valores dividida entre 10, es decir, 8.5. En consecuencia tenemos

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) = 8.5 - 2\times 4 = 0.5$$

Finalmente, como las varianzas valen 1, la correlación y la covarianza valen lo mismo:

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}} = 0.5$$

---

3. (**4 ptos.**)

   a) Sea X una variable aleatoria con densidad $f(x) = 6x(1-x)$ para $0 < x < 1$ y $f8x) = 0$ en otro caso. Compruebe que f es una densidad y obtenga media y varianza para esta distribución.

   b) Si $Y = 1/X$ halle la media de Y. ¿Existe la varianza de Y? Si su respuesta es afirmativa, calcúlela. Si es negativa, explique por qué no existe.

Solución.

a) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (6x-6x^2)\,dx = \big(3x^2-2x^3\big|_0^1 = 1.$

$$\mathrm{E}(X) = \int_{\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_0^1 x(6x-6x^2)\,dx = \int_0^1 (6x^2-6x^3)\,dx = \Big(2x^3-\frac{3}{2}x^4\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_{\infty}^{\infty} x^2f(x)\,dx = \int_0^1 x^2(6x-6x^2)\,dx = \int_0^1 (6x^3-6x^4)\,dx = \Big(\frac{3}{2}x^4-\frac{6}{5}x^5\Big|_0^1 = \frac{3}{10}.$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2)-(\mathrm{E}(X))^2 = \frac{3}{10}-\frac{1}{4} = \frac{1}{20}.$$

b)

$$\mathrm{E}(Y) = \int_{\infty}^{\infty} y(x)f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x}(6x-6x^2)\,dx = \int_0^1 (6-6x)\,dx = \Big(6x-3x^2\Big|_0^1 = 3.$$

Para que exista la varianza es necesario que exista el segundo momento $\mathrm{E}(Y^2)$, que se obtiene mediante la integral

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}(6x-6x^2)\,dx = \int_0^1 \frac{6}{x}\,dx - \int_0^1 6\,dx$$

La segunda integral existe y vale 6, pero la primera es una integral impropia porque el integrando $1/x$ no está acotado cuando $x \to 0$. Para ver si existe calculamos

$$\lim_{a\to 0}\int_a^1 \frac{6}{x}\,dx = \lim_{a\to 0} 6\ln x\Big|_a^1 = -\lim_{a\to 0} 6\ln a = \infty$$

En consecuencia esta variable no tiene segundo momento ni varianza.