Elementos de Probabilidad y Estadística
Segundo Examen
Parte 2
Respuestas

Para entregar antes de las 12:30 p.m. del jueves 17 de mayo de 2010.
Este examen es estrictamente individual. Puedes consultar libros o notas de clase y puedes preguntar al profesor y a los ayudantes pero no a tus compañeros.

1. Sean $G = \{1, 2, 3\}$, $H = \{4, 5, 6\}$ Lanzamos dos dados y sean los eventos A : 'el primer dado cae en G', B : 'El segundo dado cae en H', C : 'un dado cae en G y el otro en H', D : 'el total es cuatro', E : 'el total es cinco' y F : 'el total es siete'. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son ciertas?

   a) A y F son independientes.
   b) A y D son independientes.
   c) A y E son independientes.
   d) $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$.
   e) A y C son independientes.
   f) C y E son independientes.
   g) $P(A \cap C \cap E) = P(A)P(C)P(E)$.
   h) A, C y E son independientes.

<u>Solución</u>. Llamemos X al resultado del primer dado y Y al del segundo. Tenemos
$P(A) = P(X \in G) = 1/2, \qquad P(B) = P(Y \in H) = 1/2,$
$P(C) = P((\{X \in G\} \cap \{Y \in H\}) \cup (\{X \in H\} \cap \{Y \in G\})) = 1/2,$
$P(D) = P(X + Y = 4) = 1/12, \quad P(E) = P(X + Y = 5) = 1/9, \quad P(F) = P(X + Y = 7) = 1/6.$
En lo que sigue el vector (i, j) indica que el primer dado salió i y el segundo j.
a) **Cierto.** $P(A \cap F) = P(\{(1, 6); (2, 5); (3, 4)\}) = 1/12 = (1/2) \times (1/6) = P(A)P(F)$, de modo que sí son independientes.
b) **Falso.** $P(A \cap D) = P(\{(1, 3); (2, 2); (3, 1)\}) = 1/12 \neq (1/2) \times (1/12) = P(A)P(D)$, y los eventos no son independientes.
c) **Falso.** $P(A \cap E) = P(\{(1, 4); (2, 3); (3, 2)\}) = 1/12 \neq (1/2) \times (1/9) = P(A)P(E)$, y los eventos no son independientes.
d) **Falso.** $P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B) = 1/4 \neq (1/2) \times (1/2) \times (1/2) = P(A)P(B)P(C)$. No es cierto.
e) **Cierto.** $P(A \cap C) = P(A \cap B) = 1/4 = (1/2) \times (1/2) = P(A)P(C)$, de modo que sí son independientes.
f) **Cierto.** $P(C \cap E) = P(\{(1, 4); (4, 1)\}) = 1/18 = (1/2) \times (1/9) = P(C)P(E)$, de modo que sí son independientes.
g) **Cierto.** $P(A \cap C \cap E) = P(\{(1, 4)\}) = 1/36 \neq (1/2) \times (1/2) \times (1/9) = P(A)P(C)P(E)$.
h) **Falso.** No son independientes por c).

2. La caja A tiene dos bolas rojas y tres negras. La caja B tiene cinco rojas y una blanca. Se selecciona una bola al azar de la caja A y se coloca en la caja B y luego se escoge una bola al azar de la caja B.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que ambas bolas sean rojas?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola sea roja?

   c) Dado que la segunda bola es roja ¿Cuál es la probabilidad de que la primera también haya sido roja?

   d) Dado que la segunda bola es blanca ¿cuál es la probabilidad de que la primera haya sido roja?

Solución. Llamemos R_i al evento 'la bola i es roja' para $i = 1, 2$. De manera similar B_i para el color blanco.
a)$P(R_1 \cap R_2) = P(R_2|R_1)P(R_1) = \frac{6}{7} \times \frac{2}{5} = \frac{12}{35}$.
b) Por la Ley de la Probabilidad Total,

$$P(R_2) = P(R_2|R_1)P(R_1) + P(R_2|R_1^c)P(R_1^c) = \frac{12}{35} + \frac{5}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{27}{35}.$$

c) $P(R_1|R_2) = \frac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$.
d) Usando el Teorema de Bayes,

$$P(R_1|B_2) = \frac{P(B_2|R_1)P(R_1)}{P(B_2|R_1)P(R_1) + P(B_2|R_1^c)P(R_1^c)} = \frac{(1/7)(2/5)}{(1/7)(2/5) + (1/7)(3/5)} = \frac{2}{5}.$$

3. Sea X una variable aleatoria discreta con función de probabilidad p dada por:

x_i :	-2	-1	0	1	2	3	4	5
p_i :	0.1	0.2	0.15	0.2	0.1	0.15	0.05	0.05

Sea Y la variable aleatoria definida por $Y = X^2$.

a) Halle la función de probabilidad de Y.

b) Calcule el valor de la función de distribución de X y de Y en los puntos $1, 3/4$ y $\pi - 3$.

c) Calcule la probabilidad de los siguientes eventos (i) Y es impar (ii) $P(X < 1|Y \leq 2)$ (iii) $P(Y > 2|X < 1)$ (iv) $P(X < 0|Y \geq 1)$.

Solución. a) La función de probabilidad de Y es

y_j :	0	1	4	9	16	25
q_j :	0.15	0.4	0.2	0.15	0.05	0.05

b)

$$F_X(1) = 0.65; \qquad F_X(3/4) = 0.45; \qquad F_X(\pi - 3) = 0.45,$$
$$F_Y(1) = 0.55; \qquad F_X(3/4) = 0.15; \qquad F_X(\pi - 3) = 0.15.$$

c) (i) $P(Y \text{ impar}) = \sum_{i=-2}^{1} p_i = 0.6$.

(ii) $P(X < 1|Y \leq 2) = \dfrac{P(X < 1, Y \leq 2)}{P(Y \leq 2)} = \dfrac{P(X \in \{-1, 0\})}{P(Y \in \{0, 1\}} = \dfrac{0.35}{0.55} = \dfrac{7}{11}$.

(iii) $P(Y > 2|X < 1) = \dfrac{P(Y > 2, X < 1)}{P(X < 1)} = \dfrac{P(X = -2)}{P(X \in \{-2, -1, 0\}} = \dfrac{0.1}{0.45} = \dfrac{2}{9}$.

(iv) $P(X < 0|Y \geq 1) = \dfrac{P(X < 0, Y \geq 1)}{P(Y \geq 1)} = \dfrac{P(X \in \{-2, -1\})}{P(Y \in \{4, 9, 16, 25\})} = \dfrac{0.3}{0.85} = \dfrac{6}{17}$.

4. Una caja contiene k bolas numeradas de 1 a k. Seleccionamos una muestra aleatoria de tamaño $n \leq k$ sin reposición. Sea Y el mayor de los números obtenidos y Z el menor. a) Halle las funciones de probabilidad de Y y Z. b) Si $k = 10$ y $n = 3$ calcule $P(Y < 8)$ y $P(Z < 5)$.

Solución. a) $P(Y = i)$ vale 0 si $0 < i < n$. Para hallar esta probabilidad en el caso $n \le i \le k$ observamos que en total hay $\binom{k}{n}$ maneras de escoger subconjuntos de n bolas de la caja. Para que el mayor número sea i, tenemos que escoger la bola con el número i y el resto de las bolas tienen que tener números menores, es decir, tenemos que escoger $n-1$ bolas del conjunto $\{1, 2, \dots, i-1\}$ y además la bola i. Hay $\binom{i-1}{n-1}$ maneras de hacer esto y por lo tanto

$$P(Y = i) = \begin{cases} 0, & \text{si } i < n, \\ \binom{i-1}{n-1}/\binom{k}{n}, & \text{si } n \le i \le k. \end{cases}$$

De manera similar, $P(Z = i)$ vale 0 si $i \ge k - n + 2$. Para $1 \le i \le k - n + 1$ tenemos que escoger la bola con número i y el resto tienen que tener números mayores, es decir, tenemos que escoger $n - 1$ bolas del conjunto $\{i + 1, i + 2, \dots, k\}$ y además la bola i. Hay $\binom{k-i}{n-1}$ maneras de hacer esto y por lo tanto

$$P(Z = i) = \begin{cases} 0, & \text{si } i > k - n + 1, \\ \binom{k-i}{n-1}/\binom{k}{n}, & \text{si } 1 \le i \le k - n + 1. \end{cases}$$

b) Si $k = 10,\ n = 3$ tenemos

$$P(Y < 8) = 1 - P(Y \ge 8) = 1 - \frac{1}{\binom{10}{3}}\left[\binom{7}{2} + \binom{8}{2} + \binom{9}{2}\right] = \frac{7}{24} \approx 0.292$$

También podemos observar que para que $Y \le i$ tenemos que escoger un subconjunto de n números del conjunto $\{1, 2, \dots, i\}$, y esto lo podemos hacer de $\binom{i}{n}$ maneras. Por lo tanto $F_Y(i) = P(Y \le i) = \binom{i}{n}/\binom{k}{n}$. Usando esto tenemos

$$P(Y < 8) = P(Y \le 7) = \frac{\binom{7}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{7}{24}.$$

De manera similar

$$P(Z < 5) = P(Z \le 4) = \frac{1}{\binom{10}{3}}\left[\binom{6}{2} + \binom{7}{2} + \binom{8}{2} + \binom{9}{2}\right] = \frac{5}{6} \approx 0.83$$

5. Halle la función de distribución F de la variable aleatoria X si su densidad es

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{si } -1 \le x \le 0 \\ 1 - x, & \text{si } 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

Si $Y = X^2$ halle la densidad de Y y su función de distribución.

Calcule $P(X < 0.25)$, $P(X < 0.5|X > -0.5)$, $P(Y < 0.5)$ y $P(Y < 0.75|Y > 0.25)$.

Solución. Para $-1 \le x \le 0$ tenemos

$$F_X(x) = \int_{-1}^{x} (t + 1)\, dt = \frac{t^2}{2} + t\Big|_{-1}^{x} = \frac{1}{2} + x + \frac{x^2}{2}.$$

Para $0 \le x \le 1$,

$$F_X(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x (1 - t)\, dt = \frac{1}{2} + t - \frac{t^2}{2}\Big|_0^x = \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2}.$$

En consecuencia

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + x + \frac{x^2}{2}, & \text{si } -1 \leq x \leq 0, \\ \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2}, & \text{si } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Si $Y = X^2$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \\ &= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) = 2\sqrt{y} - y. \end{aligned}$$

y derivando obtenemos

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{1}{\sqrt{y}} - 1 = \frac{\sqrt{y} - y}{y}.$$

Otra manera de hacer esto es la siguiente

$$\begin{aligned} F_Y(y) = P(-\sqrt{y} \leq X^2 \leq \sqrt{y}) &= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x)\,dx \\ = \int_{-\sqrt{y}}^{0} (1+x)\,dx &+ \int_0^{\sqrt{y}} (1-x)\,dx = 2\int_0^{\sqrt{y}} (1-x)\,dx \end{aligned}$$

Hacemos ahora el cambio de variables $x = \sqrt{t}$ y obtenemos

$$F_Y(y) = \int_0^y \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{y}} dt = \int_0^y \frac{\sqrt{t} - t}{t} dt,$$

de modo que la densidad de Y es $f_Y(y) = (\sqrt{y} - y)/y$.

Calculamos a continuación las probabilidades que se piden.

$$P(X < 0.25) = 0.5 + 0.25 - \frac{(0.25)^2}{2} = \frac{23}{32} = 0.719$$

$$\begin{aligned} P(X < 0.5 | X > -0.5) &= \frac{P(-0.5 < X < 0.5)}{P(-0.5 < X)} = \frac{F_X(0.5) - F_X(-0.5)}{1 - F_X(-0.5)} \\ &= \frac{0.75}{0.875} = \frac{6}{7} \approx 0.857 \end{aligned}$$

$$P(Y < 0.5) = 2\sqrt{0.5} - 0.5 \approx 0.914$$

$$\begin{aligned} P(Y < 0.75 | Y > 0.25) &= \frac{P(0.25 < Y < 0.75)}{P(0.25 < Y)} = \frac{F_Y(0.75) - F_Y(0.25)}{1 - F_Y(0.25)} \\ &= \frac{2\sqrt{0.75} - 0.75 - 2\sqrt{0.25} + 0.25}{1 - 2\sqrt{0.25} + 0.25} \approx \frac{0.232}{0.25} \approx 0.928 \end{aligned}$$