Elementos de Probabilidad y Estadística

Segundo Examen

Parte 1

Respuestas

Miércoles, 12 de mayo de 2010, 11 a.m. a 12:30 p.m.

1. (**5 ptos.**)

   a) Defina independencia para una colección $\mathcal{C} = \{C_t,\ t \in T\}$ de eventos.

   b) A y B son eventos tales que $P(A) = 0.3$ y $P(A \cup B) = 0.5$. Halle $P(B)$ si

   (i) A y B son independientes. (ii) A y B son disjuntos. (iii) $P(A|B) = 0.1$.

   c) Un fabricante de autos compra baterías a tres proveedores, Autolux, Buenabat y Carromat. En depósito tienen 100 baterías del primero, 200 del segundo y 300 del tercero. El fabricante sabe que los porcentajes de baterías defectuosas para estos proveedores son (en el mismo orden) 6, 3 y 1 por ciento.

   (i) Halle la probabilidad de que una batería seleccionada al azar en el depósito sea defectuosa.

   (ii) Si sabemos que una batería no ha sido producida por Carromat ¿Cuál es la probabilidad de que sea defectuosa?

   (iii) Si una batería es defectuosa ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido producida por Autolux?

Respuesta.

a) Ver notas del curso.
b) (i) Si A y B son independientes, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Por lo tanto tenemos

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B).$$

Sustituyendo los valores para $P(A)$ y $P(A \cup B)$ obtenemos

$$0.5 = 0.3 + P(B) - 0.3P(B) = 0.3 + 0.7P(B)$$

de donde obtenemos que $P(B) = 2/7$.

(ii) Si A y B son disjuntos, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ y reemplazando los valores obtenemos $P(B) = 0.5 - 0.3 = 0.2$.

(ii) Por definición $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$ y despejando $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = 0.1P(B)$. Usando esto,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 0.1P(B)$$

de donde obtenemos que $P(B) = 2/9$.
c) Llamemos A, B y C a los proveedores, entonces $P(A) = 1/6,\ P(B) = 1/3$ y $P(C) = 1/2$. Si D denota 'batería defectuosa' sabemos que $P(D|A) = 0.06,\ P(D|B) = 0.03$ y $P(D|C) = 0.01$.

(i) Usando la Ley de la Probabilidad Total,

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C) \\ &= 0.06 \cdot \frac{1}{6} + 0.03 \cdot \frac{1}{3} + 0.01 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 0.01 + 0.01 + 0.005 = 0.025. \end{aligned}$$

(ii) Queremos hallar $P(D|C^c)$ y sabemos que $C^c = A \cup B$ y que A y B son disjuntos. Usando esto tenemos

$$P(D|C^c) = \frac{P(D \cap C^c)}{P(C^c)} = \frac{P(D \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)}.$$

Como A y B son disjuntos, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 1/2$ y

$$P(D \cap (A \cup B)) = P((D \cap A) \cup (D \cap B)) = P(D \cap A) + P(D \cap B).$$

A partir de la definición de probabilidad condicional tenemos $P(D \cap A) = P(D|A)P(A) = 0.06/6 = 0.01$ y $P(D \cap B) = P(D|B)P(B) = 0.03/3 = 0.01$. Usando estos resultados obtenemos

$$P(D|C^c) = \frac{0.02}{0.5} = 0.04.$$

(iii) Queremos ahora $P(A|D)$.

$$\begin{aligned} P(A|D) &= \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D)} \\ &= \frac{0.01}{0.025} = 0.4. \end{aligned}$$

2. (**5 ptos.**)

   a) Defina *función de distribución* para una variable aleatoria con valores en $\mathbb{R}$ y enuncie las propiedades que la caracterizan.

   b) Sea X una variable aleatoria con función de distribución dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 0.1 & \text{si } 0 \le x < 2, \\ 0.35 & \text{si } 2 \le x < 3, \\ 0.65 & \text{si } 3 \le x < 5, \\ 0.8 & \text{si } 5 \le x < 6, \\ 1 & \text{si } 6 \le x. \end{cases}$$

Halle la función de probabilidad de X y calcule

(i) $P(1 < X < 4)$, (ii) $P(X \geq 2|X < 6)$.

c) Sea X una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro λ. Definimos $Y = 1 - e^{-\lambda X}$.

(i) Determine el rango de valores de Y y halle su función de distribución.

(ii) Calcule $P(Y > 0.5)$ y $P(Y > 0.5|Y > 0.25)$.

Respuesta.

a) Ver notas del curso.
b) La variable X toma valores $0, 2, 3, 5$ y 6 con probabilidades respectivas $0.1; 0.25; 0.3; 0.15$ y 0.2.

$$\begin{aligned} P(1 < X < 4) &= P(\{X = 2\} \cup \{X = 3\}) = 0.55; \\ P(X \geq 2|X < 6) &= \frac{P(2 \leq X < 6)}{P(X < 6)} = \frac{0.7}{0.8} = \frac{7}{8}. \end{aligned}$$

c) (i) Y toma valores en $(0, 1)$.

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(1 - e^{-\lambda X} \leq y) \\ &= P(1 - y \leq e^{-\lambda X}) \\ &= P(X \leq -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - y)) \\ &= 1 - \exp\{\ln(1 - y)\} = y \end{aligned}$$

para $0 < y < 1$. Es decir, Y tiene distribución uniforme en $[0, 1]$.

(ii) Usando esto obtenemos $P(Y > 0.5) = 0.5$ y

$$P(Y > 0.5|Y > 0.25) = \frac{P(Y > 0.5)}{P(Y > 0.25)} = \frac{0.5}{0.75} = \frac{2}{3}.$$