Elementos de Probabilidad y Estadística

Solución del Primer Examen

Parte 2

Para entregar antes de las 12:30 pm del jueves 11 de marzo de 2010.
Este examen es estrictamente individual. Puedes consultar libros o notas de clase y puedes preguntar al profesor y a los ayudantes pero no a tus compañeros.

1. (**2 ptos.**) Se realiza una prueba con 11 preguntas a contestar por *sí* o *no*. Se da por aprobada la prueba si se contestan correctamente al menos 6 de las 11 preguntas. a) ¿Cuál es la probabilidad de aprobar el examen contestando al azar?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de contestar correctamente a lo sumo 1 de las preguntas?

   c) Si el estudiante sabe la respuesta a tres de las preguntas y el resto las contesta al azar ¿cuál es la probabilidad de que apruebe el examen?

   Respuesta. El número de aciertos N sigue una distribución binomial con parámetros 11 y 0.5.

   a) La probabilidad de aprobar el examen es

$$P(N \geq 6) = \sum_{j=6}^{11} P(N = j) = (0.5)^{11} \sum_{j=6}^{11} \binom{11}{j} = 0.5$$

Hay una manera más sencilla de responder esta pregunta sin realizar ningún cálculo observando que a cada configuración de respuestas con 6 o más respuestas correctas le corresponde (exactamente) otra configuración con menos de 6 respuestas correctas: Si representamos las respuestas al examen por un vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{11})$ donde $x_i = 1$ si la i-ésima respuesta es correcta y 0 si no lo es, definimos $y_i = 1 - x_i$. Entonces y_i vale 1 si $x_i = 0$, $y_i = 0$ si $x_i = 1$. Si $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{11})$ es una configuración con 6 o más respuestas correctas, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{11})$ es una configuración con menos de 6 respuestas correctas y, recíprocamente, si $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{11})$ es una configuración con menos de 6 respuestas correctas, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{11})$ es una configuración con 6 o más respuestas correctas. Esta relación $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}$ es una biyección y por lo tanto exactamente la mitad de las respuestas conducen a aprobar el examen y la otra mitad a reprobarlo.

b) La probabilidad que queremos es

$$P(N \leq 1) = (0.5)^{11} \left[\binom{11}{0} + \binom{11}{1} \right] = \frac{12}{2048} = 0.0059$$

c) Si el estudiante sabe la respuesta a tres de las preguntas, para aprobar necesita acertar al menos 3 de las 8 restantes. En este caso el número de aciertos K sigue una distribición binomial con parámetros 8 y 0.5, de modo que la probabilidad de aprobar es

$$P(K \geq 3) = \sum_{j=3}^{8} P(N = j) = (0.5)^8 \sum_{j=3}^{8} \binom{8}{j}$$

Es más sencillo calcular la probabilidad de no aprobar y luego restar esta cantidad de 1. La probabilidad de no aprobar es:

$$P(N \leq 2) = \sum_{j=0}^{2} P(N = j) = (0.5)^8 \sum_{j=0}^{2} \binom{8}{j} = \frac{37}{256} = 0.145$$

y la probabilidad de aprobar es $1 - 0.145 = 0.855$.

2. (**3 ptos.**) a) Se lanzan cuatro dados y se multiplican los números que se obtienen. (i) ¿Cuál es la probabilidad de que el producto sea divisible por 5? (ii) ¿Cuál es la probabilidad de que el último dígito en el producto sea 5?

b) Antonio y Bruno acuerdan una competencia de esgrima en una serie de mangas de modo que el primero en ganar dos mangas seguidas gana la competencia. Antonio tiene probabilidad p de ganar una manga y Bruno probabilidad $q = 1 - p$. ¿Cuál es la probabilidad de que la competencia termine al cabo de k mangas?

Solución.

(a)(i) Para que el producto sea divisible por 5 es necesario que al menos uno de los factores sea 5. Calculamos la probabilidad de que ninguno de los dados sea 5 y la restamos de 1. Sea A el evento 'Al menos un dado es 5'

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{5^4}{6^4} = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296} = 0.518$$

(ii) Para que el producto termine en 5 es necesario que haya al menos un 5 y ninguno de los otros números sea par. Llamemos B al evento 'ninguno de los dados es par'. Queremos calcular $P(A \cap B)$. Tenemos

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^c) \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(B) - P(A^c \cap B).$$

Pero

$$P(B) = \frac{3^4}{6^4}, \qquad P(A^c \cap B) = \frac{2^4}{6^4}$$

y por lo tanto

$$P(A \cap B) = \frac{3^4}{6^4} - \frac{2^4}{6^4} = \frac{65}{1296} = 0.05$$

b) Para que la competencia termine al cabo de k mangas es necesario que durante las primera $k-2$ los jugadores ganen alternadamente y que el jugador que perdió la partida $k-2$ gane las dos siguientes. Supongamos inicialmente que k es par, entonces Si A comienza ganando, B debe ganar la siguiente, y alternan hasta la partida $k-2$, que gana B. Las dos últimas partidas las gana A. Para calcular la probabilidad de que esto ocurra observamos que B gana la mitad de las primeras $k-2$ mangas mientras que A gana la mitad de las primeras $k-2$ partidas y las dos últimas. Esto tiene probabilidad

$$q^{\frac{k}{2}-1}p^{\frac{k}{2}+1}$$

Si en cambio B gana la primera partida un razonamiento análogo muestra que la probabilidad de que la competencia termine al cabo de k mangas es

$$p^{\frac{k}{2}-1}q^{\frac{k}{2}+1}$$

Por lo tanto si k es par la probabilidad de que la competencia termine al cabo de k partidas es la suma de estas dos probabilidades.

$$q^{\frac{k}{2}-1}p^{\frac{k}{2}+1} + p^{\frac{k}{2}-1}q^{\frac{k}{2}+1} = (pq)^{\frac{k}{2}-1}(p^2 + q^2)$$

Si en cambio k es impar un razonamiento similar al anterior observando que en este caso quien gana la primera partida debe perder la competencia para que termine en k mangas nos dá que la probabilidad de terminar en k mangas es

$$q^{\frac{k-1}{2}}p^{\frac{k+1}{2}} + p^{\frac{k-1}{2}}q^{\frac{k+1}{2}} = (pq)^{\frac{k-1}{2}}$$

Resumiendo, si N denota el número de mangas para que termine la competencia,

$$P(N = k) = \begin{cases} (pq)^{\frac{k}{2}-1}(p^2 + q^2) & \text{si } k \text{ es par,} \\ (pq)^{\frac{k-1}{2}} & \text{si } k \text{ es impar.} \end{cases}$$

3. (**2 ptos.**) a) a) Una caja contiene ocho bolas, dos rojas, dos azules, dos blancas y dos negras. Extraemos cuatro bolas de la caja sin reposición ¿Cuál es la probabilidad de que haya una bola de cada color?

b) ¿De cuántas maneras podemos escoger cuatro cartas de distintas pintas y distintos valores a partir de un juego de 52 cartas?

Solución.

a) Como hay 8 bolas y queremos seleccionar 4 de ellas, tenemos $\binom{8}{4}$ maneras de hacerlo. Para obtener cuatro bolas de colores distintos tenemos dos maneras de escoger la bola roja y para cada una de ellas tenemos dos maneras de escoger la bola azul, y así sucesivamente. Por lo tanto hay 2^4 maneras de escoger cuatro bolas de manera que sean de colores distintos. Por lo tanto la probabilidad buscada es

$$2^4 \times \frac{1}{\binom{8}{4}} = \frac{16}{70} = 0.23$$

b) La primera carta puede ser cualquiera de las 52. Escogida esta tenemos que eliminar las 12 cartas restantes de la misma pinta y las tres cartas de otras pintas con el mismo valor, de modo que la segunda carta puede ser cualquiera de las 36 restantes. Seleccionada ésta, hay que eliminar las 11 restantes de la misma pinta y las dos cartas restantes del mismo valor. Quedan 22 cartas para seleccionar la tercera. Finalmente para la cuarta quedan 10 para la última carta. En total hay

$$52 \times 36 \times 22 \times 10 = 411,840$$

maneras de hacer esto. Pero estamos contando como distintas las permutaciones de estos números de cuatro cifras, por lo tanto hay que dividir este total entre 4!:

$$\frac{411,840}{24} = 17,160.$$

4. (**3 ptos.**) Considere todas las poligonales $(n, S_n), n \geq 0$ que parten del origen – es decir, que $S_0 = 0$ – y que, en cada paso, saltan una unidad hacia arriba o hacia abajo. Dicho de otra manera, $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, donde cada X_i vale 1 ó -1 (ver figura 1 (a)).

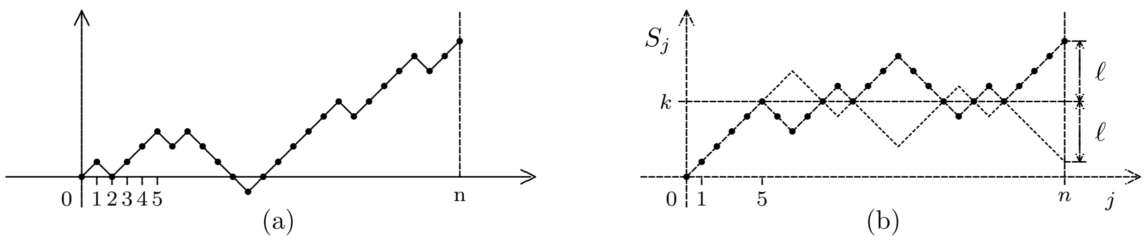

Figura 1

a) ¿Cuántas poligonales podemos construir en el intervalo de tiempo $[0, n]$?

b) ¿Cuántas poligonales satisfacen $S_n = 0$?

c) Usamos la notación $N_{n,h} = \sharp\{$ poligonales tales que $S_n = h\}$. Sea k un entero positivo y ℓ un entero no-negativo. Probar que (ver figura 1 (b))

$$N_{n,k+\ell} = \sharp\{ \text{ poligonales tales que } S_n = k - \ell, \text{ y para algún } m \leq n \text{ se tiene } S_m = k\}$$

d) Sea k un entero positivo, probar que $\sharp\{\text{poligonales tales que } S_n = 0, \max_{1 \leq m \leq n} S_n \geq k\} = N_{n,2k}$.

e) Suponga que una partícula comienza en 0 en el instante 0 y en cada paso se mueve hacia arriba con probabilidad p y hacia abajo con probabilidad $q = 1 - p$. Calcule la probabilidad de que al cabo de n pasos la partícula se encuentre en el lugar k.

Solución. a) En cada paso tenemos dos posibilidades, subir o bajar, de modo que hay 2^n trayectorias posibles en el intervalo $[0, n]$.

b) Para que $S_n = 0$ es necesario que haya el mismo número de pasos hacia arriba que hacia abajo, y por lo tanto necesariamente n tiene que ser par, digamos $n = 2k$. Podemos escoger los lugares para los pasos hacia arriba de

$$\binom{n}{k} = \binom{2k}{n} = \frac{(2k)!}{(k!)^2}$$

c) Consideremos una poligonal T tal que $S_n = k+\ell$, con $\ell \geq 0$. Entonces, como las poligonales son continuas, existe al menos un índice r tal que $S_r = k$ y $1 \leq r \leq n$. Llamemos r_0 al menor índice para el cual se cumple esta relación:

$$r_0 = \min\{r : S_r = k\}$$

Definimos una nueva poligonal T' a partir de T *reflejando* la trayectoria a partir del instante r_0 respecto de la horizontal de nivel k, como se muestra en la figura 1 (b). Para esto, a partir del instante $r_0 + 1$ y hasta el instante n, si T da un paso hacia arriba, T' da un paso hacia abajo, y viceversa. Es decir, definimos $X'_j = X_j$ para $1 \leq j \leq r_0$, $X'_j = -X_j$ para $r_0 + 1 \leq j \leq n$ y

$$S'_j = \sum_{i=1}^{j} X'_i.$$

T' es la poligonal que corresponde a las sumas $\{S'_j,\ 0 \leq j \leq n\}$.

Observamos ahora que como $S_{r_0} = k$, $S_n = k + \ell$, y S'_j es la poligonal reflejada a partir de r_0 respecto de la recta horizontal de altura k, $S'_n = k - \ell$, es decir, que la poligonal T' satisface las dos condiciones que definen el conjunto que aparece en el lado derecho del inciso (c).

Como esta construcción que hemos descrito es biyectiva, ambos conjuntos tienen el mismo número de elementos y la relación es cierta.

d) Basta poner $\ell = k$ en el inciso anterior.

e) Con la notación que hemos utilizado queremos hallar $P(S_n = k)$. Sea s el número de pasos hacia arriba hasta el instante n y t el número de pasos hacia abajo. Entonces

$$s + t = n, \qquad s - t = k.$$

Sumando estas dos ecuaciones obtenemos $2s = n+k$ y restándolas $2t = n-k$. La primera de estas ecuaciones implica que n y k deben tener la misma paridad. Además $s = (n+k)/2$, $t = (n-k)/2$. Si llamamos *éxito* a un paso hacia arriba y *fracaso* a uno hacia abajo, tenemos una serie de n ensayos de Bernoulli con probabilidad p de éxito, y esto tiene distribución binomial de parámetros n y p. Por lo tanto

$$P(S_n = k) = \begin{cases} \binom{n}{s} p^s q^t & \text{si } n \text{ y } k \text{ tienen la misma paridad.} \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$