Elementos de Probabilidad y Estadística
Solución del Primer Examen

Parte 1

1. (**3 ptos.**) a) Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $A_n \in \mathcal{F}$, $n \geq 1$ una sucesión de creciente de eventos: $A_n \subset A_{n+1}$. Demuestre que

$$P(\cup_{n\geq 1} A_n) = \lim_{m\to\infty} P(A_m).$$

b) Sean A, B y C tres eventos en un espacio de probabilidad. Demuestre

$$P(A \cap B) - P(A)P(B) = P(A^c \cap B^c) - P(A^c)P(B^c).$$

Respuesta. (a) Ver notas del curso.

b) Partimos de la relación $P(A \cup B) = P(A) + P(A) - P(A \cap B)$, de donde obtenemos $P(A \cap B) = P(A) + P(A) - P(A \cup B)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} P(A \cap B) - P(A)P(B) &= P(A) + P(B) - P(A)P(B) - P(A \cup B) \\ &= P(A)(1 - P(B)) + P(B) - P(A \cup B) \\ &= P(A)P(B^c) + P(B) - P(A \cup B). \end{aligned}$$

Usando las leyes de deMorgan, $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$ y por lo tanto

$$P(A \cup B) = P((A^c \cap B^c)^c) = 1 - P(A^c \cap B^c)$$

Reemplazando en la ecuación anterior,

$$\begin{aligned} P(A \cap B) - P(A)P(B) &= P(A)P(B^c) + P(B) - 1 + P(A^c \cap B^c) \\ &= P(A)P(B^c) - P(B^c) + P(A^c \cap B^c) \\ &= -P(B^c)(1 - P(A)) + P(A^c \cap B^c) \\ &= -P(B^c)P(A^c) + P(A^c \cap B^c) \end{aligned}$$

2. (**4 ptos.**) a) En una bolsa hay tres cartas numeradas 1, 2 y 3. Sacamos las cartas al azar sucesivamente y sin reposición. Describa el espacio muestral de este experimento. Calcule la probabilidad de los siguientes eventos:

(i) O bien el 2 sale en primer lugar o bien el 1 sale en tercer lugar (o ambos). (ii) Ningún número ocupa su lugar.

b) Repita el ejercicio anterior si las cartas se extraen con reposición.

Respuesta. a) Un espacio muestral en este caso es el conjunto de las permutaciones de 1, 2, 3. Este espacio muestral tiene $3! = 6$ elementos.

(i) Llamemos A al evento 'sale 2 en el primer lugar' y B al evento 'sale 1 en el tercer lugar. Queremos calcular la probabilidad de $A \cup B$: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Hay dos permutaciones que tienen 2 en el primer lugar, y dos que tienen 1 en el tercer lugar. Hay una sóla que tiene 2 en el primero y 1 en el tercero. Por lo tanto

$$P(A \cup B) = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Otra manera de hacer esto es observar que $A \cup B = \{213, 231, 321\}$ y por lo tanto la probabilidad de este evento es $3/6 = 1/2$.

(ii) Hay dos permutaciones en las cuales ningún elemento ocupa su lugar: 231 y 312. Por lo tanto la probabilidad de que esto ocurra es $2/6 = 1/3$.

b) Si reponemos los números antes de hacer una nueva selección, el espacio muestral es ahora el conjunto de vectores (a, b, c) donde las componentes pertenecen al conjunto $\{1, 2, 3\}$ y pueden repetirse. Este espacio muestral tiene $3^3 = 9$ elementos.

(i) Usando la notación de la parte a) tenemos

$$P(A) = \frac{3^2}{3^3} = \frac{1}{3}; \qquad P(B) = \frac{3^2}{3^3} = \frac{1}{3}; \qquad P(A \cap B) = \frac{3}{3^3} = \frac{1}{9},$$

y en consecuencia

$$P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}.$$

(ii) En cada lugar tenemos dos números para escoger y tenemos tres lugares. Por lo tanto la probabilidad es

$$\frac{2^3}{3^3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3.$$

3. (**3 ptos.**) Las claves o Números de Identificación Personal (NIP) para las tarjetas bancarias tienen usualmente 4 cifras. Si una computadora asigna estos números al azar y el 0 puede ocupar cualquier lugar,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que las cuatro cifras sean diferentes?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente un dígito repetido?

Respuesta. Tenemos cuatro lugares y podemos escoger cualquiera de los 10 dígitos para cada uno de ellos, de modo que en total hay 10^4 números posibles.

a) Si no queremos que ningún dígito esté repetido, tenemos 10 posibilidades para el primer lugar, 9 para el segundo, 8 para el tercero y 7 para el cuarto. Por lo tanto la probabilidad de ningún dígito aparezca repetido es

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{10^4} = 0.504.$$

(b) El número se puede repetir 2, 3 ó 4 veces y estos eventos son disjuntos. Si A_i denota el evento 'Un dígito se repite i veces' queremos hallar

$$P(\cup_{i=2}^{4} A_i) = P(A_2) + P(A_3) + P(A_4).$$

Para A_2 tenemos 10 maneras de escoger el dígito que se repite y $\binom{4}{2}$ maneras de escoger los lugares en los cuales colocarlo. Hecho esto, quedan dos lugares y 9 dígitos. Si no queremos que haya repetición podemos llenar los dos lugares restantes de $9 \cdot 8$ maneras. Por lo tanto la probabilidad deseada es

$$P(A_2) = \binom{4}{2} \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{10^4} = 0.432$$

Para A_3 tenemos 10 maneras de escoger el dígito que se repite y $\binom{4}{3}$ maneras de escoger los lugares en los cuales colocarlo. Hecho esto, queda un lugar y 9 dígitos. Por lo tanto la probabilidad deseada es

$$P(A_3) = \binom{4}{3} \frac{10 \cdot 9}{10^4} = 0.036$$

Finalmente para A_4 sólo hay que escoger el dígito que se repite, y esto se puede hacer de 10 maneras. Por lo tanto

$$P(A_4) = \frac{10}{10^4} = 0.001$$

Sumando obtenemos la probabilidad que buscamos

$$P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = 0.432 + 0.036 + 0.001 = 0.469$$