Elementos de Probabilidad y Estadística
Problemas IX

Los problemas 3, 6, 13 y 22 son para entregar el miércoles 12/05/10.

1. Sea X una variable aleatoria con distribución normal de parámetros $\mu = 12$, $\sigma^2 = 9$. Use `R` para calcular

   a. $P(X > 3)$. b. $P(|X - 12| < 4)$. c. $P(|X - 10| > 2)$.

2. Determine el valor que debe tomar la constante A en cada caso para que las siguientes funciones sean densidad de una función de distribución.

   a. $f(x) = Ae^{-\alpha|x-\theta|}, \ -\infty < x < \infty, \ \alpha$ y θ constantes.

   b. $f(x) = Ax^{\alpha+1}, \ x > x_0 > 0, \ \alpha$ constante.

   c. $f(x) = Ax(1-x), \ 0 \leq x \leq 1$.

   d. $f(x) = \frac{A}{1+x^2}, \ -\infty < x < \infty$.

3. Sea $f(x) = Cxe^{-x}, \ x > 0$ una densidad.

   a. Determine el valor de C. b. Calcule $P(X < 2)$. c. Calcule $P(2 < X < 3)$.

4. Halle la función de distribución F y su gráfica si la densidad es

   a. $f(x) = 1/2, \ 0 \leq x \leq 2$. b. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & \text{si } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$

5. Si $f(x) = \frac{1}{2}e^{-x/2}, \ x > 0$, halle un número x_0 tal que $P(X > x_0) = 1/2$.

6. Sea X una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro $\lambda = 0.5$. Calcule

   a. $P(X > 1)$, b. $P(0.5 < X < 1.5)$, c. $P(X > 2|X > 1)$.

7. La vida de una máquina, medida en horas, tiene densidad $f(x) = C/x^2, \ x > 100$.

   a. Calcule C. b. Halle la función de distribución. c. Calcule $P(X > 500)$.

8. La temperatura T de cierto objeto, medida en grados Fahrenheit, tiene una distribución normal con parámetros $\mu = 98.6$ y $\sigma^2 = 2$. La temperatura θ medida en grados centígrados está relacionada con T por la fórmula $\theta = 5 \cdot (T - 32)/9$. Obtenga la distribución de θ.

9. La magnitud v de la velocidad de una molécula con masa m en un gas de temperatura absoluta T es una variable aleatoria que, de acuerdo a la teoría cinética de los gases, posee una distribución de Maxwell con parámetro $\alpha = (2kT/m)^{1/2}$, donde k es la constante de Boltzman. La distribución de Maxwell de parámetro α tiene densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\alpha^3} x^2 \exp\left(\frac{x^2}{k^2}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

   ¿Cuál es la densidad de la energía cinética $E = mv^2/2$ de una molécula?

10. Halle la densidad de $Y = e^X$ donde X tiene distribución normal con parámetros μ y σ^2. (Se dice que la variable Y tiene distribución lognormal con parámetros μ y σ^2).

11. Escriba un programa de computación para simular n valores de una variable de Bernoulli con $p = 1/3$. Corra el programa para $n = 100; \ 1000; \ 10000$ y en cada caso determine la proporción de los valores que son iguales a 1.

12. Escriba un programa de computación que tenga como entrada la función de probabilidad $p_i, i = 1, \ldots n$ y como resultado produzca un valor de la variable con esta función de probabilidad y valores en $\{1, 2, \ldots, n\}$.

13. Considere la distribución binomial negativa con parámetros p y k. Verifique la relación

$$P(X = j + 1) = \frac{j(1-p)}{j+1-k} P(X = j).$$

   Use esta relación para dar un nuevo algoritmo para generar esta distribución.

14. Dé un método para generar una variable aleatoria tal que $P(X = i) = \left(e^{-\lambda}\lambda^i/i!\right)/\left(\sum_{i=0}^{k} e^{-\lambda}\lambda^i/i!\right),\ i = 0, \dots, k$.

15. Dé un método para generar una variable aleatoria con distribución triangular.

16. Dé un método para generar una variable aleatoria con función de densidad $f(x) = e^x/(e-1), \quad 0 \le x \le 1$.

17. Dé un método para generar una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{2}, & \text{si } 2 \le x \le 3, \\ \frac{2-x/3}{2}, & \text{si } 3 \le x \le 6. \end{cases}$$

18. Use el método de la transformada inversa para generar una variable aleatoria con función de distribución $F(x) = (x^2 + x)/2, \quad 0 \le x \le 1$.

19. Dada la función de probabilidad conjunta definida por

$$p_{ij} = C(i + j) \tag{1}$$

en los puntos $(1, 1)$; $(2, 1)$; $(2, 1)$ y $(3, 1)$, donde C es una constante, determine en valor de C y obtenga la función de probabilidad marginal correspondiente a la primera variable.

20. Sean X, Y variables aleatorias con valores en $\{1, 2, \dots, n\}$ y con función de probabilidad conjunta dada por (1). Halle el valor de C y las distribuciones marginales.

21. La función $p_{i,j}$ está dada por $p_{i,j} = C\alpha^i\beta^j$ para $i, j \in \mathbb{N}$ y $0 < \alpha, \beta < 1$. Halle el valor de C para que $p_{i,j}$ sea la función de probabilidad de las variables (X, Y). Halle las funciones de probabilidad marginales. ¿Son independientes estas variables?

22. ¿Es $p_{i,j} = (0.5)^{i+j}$ para $i, j \in \{0, 1, 2, \dots\}$ una función de probabilidad? Si la respuesta es positiva, calcule $P\{1 \le i \le 3, j \ge 2\}$

23. La función $p_{i,j}$ está dada por

$$p_{i,j} = C\binom{10}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}.$$

Halle el valor de C y determine las funciones de probabilidad marginales.

24. Sea $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ y P la distribución uniforme en Ω (todos los puntos tienen igual probabilidad). Definimos las variables X, Y y Z de la siguiente manera: $X(\omega_1) = Y(\omega_2) = Z(\omega_3) = 1$, $X(\omega_2) = Y(\omega_3) = Z(\omega_1) = 2$, $X(\omega_3) = Y(\omega_1) = Z(\omega_2) = 3$. Demuestre que estas tres variables tienen la misma función de probabilidad. Halle las funciones de probabilidad de $X + Y$, $Y + Z$ y $X + Z$.

25. Considere un grupo de cartas que consiste de J, Q, K y A de las cuatro pintas. Se extraen dos cartas del grupo sin reposición y llamamos X e Y al número de diamantes y corazones obtenidos, respectivamente. Obtenga la función de probabilidad conjunta y la función marginal correspondiente a X.

26. Una caja tiene 6 bolas numeradas del 1 al 6. Las bolas numeradas 1 y 2 son rojas mientras que las otras son blancas. Extraemos dos bolas al azar de la caja y sean X, Y las variables aleatorias que representan el número de bolas rojas y el número de bolas pares en la muestra, respectivamente. Halle la distribuciones de X e Y y su distribución conjunta. Determine si estas variables son independientes.