Elementos de Probabilidad y Estadística
Problemas VIII

Los problemas 1, 10, 15 y 22 son para entregar el miércoles 28/04/10.

1. Una señal se codifica como una sucesión de ceros y unos para trasmitirla digitalmente. Debido a imperfecciones en el canal de transmisión cualquiera de estos dígitos se recibe erroneamente (uno se recibe como cero o cero se recibe como uno) con probabilidad p. (a) ¿Cuál es la probabilidad de tener al menos un error en una sucesión de n dígitos? (b) Para reducir la probabilidad de error cada dígito se repite tres veces. cada dígito en el trío puede trasmitirse erroneamente con probabilidad p y tomamos como valor de cada trío al entero que se repita más veces: 001 lo interpretamos como 0. ¿Cuál es la probabilidad de que cualquier dígito se reciba erroneamente? ¿Cuál es la probabilidad de tener al menos un error en una sucesión de n dígitos?

2. Dos jugadores A y B llevan a cabo una serie de juegos de manera independiente. La probabilidad de que A gane es p, la de B es q y la probabilidad de un empate es $1 - p - q$. La serie termina una vez que alguno de los dos gana una partida. Este es un formato común para eliminatorias de 'muerte súbita'. (a) ¿Cuál es la probabilidad de que A gane en el n-ésimo juego? (b) ¿Cuál es la probabilidad de que A gane la serie? (c) ¿Cuál es la probabilidad de que la serie dure n partidas?

3. Lanzamos un dado repetidamente hasta obtener un seis. Sea A_n el evento que ocurre si el primer seis aparece en el n-ésimo lanzamiento y B el evento que el número de lanzamientos requeridos sea par. Hallar $P(B)$ y $P(A_n|B)$.

4. Sea $X \sim b(n, p)$. Demuestre que $(P(X = k))^2 \geq P(X = k + 1)P(X = k - 1)$ para todo k.

5. Sea $X \sim b(n, p)$ y $Y \sim b(n, 1 - p)$, demuestre que $P(X = k) = P(Y = n - k)$. Dé una interpretación para este resultado.

6. Una fábrica recibe un lote de componentes y los prueba para verificar su funcionamiento. Por cada 100 componentes se prueban 10 y se acepta el lote si a lo sumo un componente falla. ¿Cuál es la probabilidad de aceptar un lote de tamaño 100 que contiene 7 defectuosos?

7. Lanzamos un dado hasta obtener el primer seis y sea T el lanzamiento en el cual esto ocurre. (a) ¿Cuál es la distribución de probabilidad de T? (b) Calcule $P(T > 6)$. (c) Calcule $P(T > 6|T > 3)$.

8. En una sucesión de ensayos de Bernoulli ¿Cuál es la probabilidad de que el primer éxito ocurra luego del quinto ensayo dado que no ha ocurrido en los dos primeros ensayos?

9. Sea X una variable con distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 0.3$. Calcule $P(X = 0), P(X = 1)$ y $P(X > 1)$.

10. En promedio 1 persona en 1,000 tiene un tipo particular de sangre. (a) Hallar la probabilidad de que en una ciudad de 10,000 personas ninguna tenga este tipo de sangre. (b) ¿Cuántas personas hay que examinar para tener una probabilidad mayor a 1/2 de encontrar al menos una persona con este tipo de sangre.

11. Escriba un programa de computación que tenga como entradas n, p, j y si $X \sim b(n, p)$ calcule el valor de $P(X = j)$ y la aproximación de Poisson para este valor.

12. Considere la distribución de Poisson con parámetro λ. Demuestre que el resultado más probable es el entero k tal que $\lambda - 1 \leq k \leq \lambda$. ¿Bajo qué condiciones hay dos valores más probables?

13. Suponga que la probabilidad de que haya un accidente importante en una planta eléctrica es de 0.005 en un año. Si un país tiene 100 plantas de este tipo, ¿cuál es la probabilidad de que haya al menos un accidente en un año?

14. Una linea aérea ha determinado que 4 % de los pasajeros que reservan pasajes en una ruta dada no se aparecen al momento del vuelo. en consecuencia han adoptado la política de vender 100 pasajes en un avión que sólo tiene 98 asientos. Si para un vuelo dado hay 100 asientos reservados, halle la probabilidad de que todos los pasajeros que se presentan tengan un asiento disponible.

15. Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme en $1 \leq k \leq m$ ¿Cuánto vale $P(X = k | a \leq X \leq b)$? En particular halle $P(X > n + k | X > n)$.

16. Se capturan a miembros de una población de N animales y luego de marcarlos se liberan. Los animales luego son recapturados uno a uno hasta obtener $m \leq a$ animales marcados. Sea X el número de animales capturados hasta obtener m marcados, demuestre que la distribución de esta variable aleatoria está dada por

$$P(X = n) = \frac{a}{N} \binom{a-1}{m-1} \binom{N-a}{n-m} \binom{N-1}{n-1}^{-1}$$

Esta se conoce como la distribución hipergeométrica negativa.

17. Sea X una variable aleatoria discreta con distribución de Poisson de parámetro λ. Demuestre que la probabilidad de que X sea par es $e^{-\lambda} \cosh \lambda$. ¿Cuánto vale la probabilidad de que X sea impar?

18. Si X es una variable aleatoria discreta con distribución geométrica de parámetro p, demuestre que $P(X > k) = (1-p)^k$.

19. Sea X una variable aleatoria con distribución geométrica de parámetro p. Sea M un entero positivo y definimos

$$Y = \begin{cases} X & \text{si } X < M, \\ M & \text{si } X \geq M, \end{cases}$$

es decir, $Y = \min(X, M)$. Calcule la función de probabilidad de Y.

20. Sea X una variable aleatoria con distribución geométrica de parámetro p. Calcule la función de probabilidad de X^2.

21. Una caja contiene k bolas numeradas de 1 a k. Seleccionamos una muestra aleatoria de tamaño n sin reposición. Sea Y el mayor de los números obtenidos y Z el menor. (a) Calcule la probabilidad $P(Y \leq y)$. (b) Calcule la probabilidad $P(Z \geq z)$.

22. Un grupo de m personas espera por el ascensor en un edificio de 10 pisos. Supongamos que cada una de estas personas escoge su piso de manera independiente de las otras y al azar, de modo que cada persona selecciona un piso con probabilidad $1/10$. Sea S_m el número de veces que el ascensor se detiene. Para estudiar esta variable aleatoria introducimos las variables Z_i para $i = 1, \dots, 10$, donde Z_i vale 1 si el ascensor se detiene en el piso i y 0 si no.

    a. Cada R_i tiene una distribución de Bernoulli. Demuestre que la probabilidad de éxito p vale $1 - \left(\frac{9}{10}\right)^m$.

    b. Tenemos que $S_m = R_1 + R_2 + \cdots + R_{10}$ ¿Es cierto que $S_m \sim b(10, p)$?

    c. Si $m = 1$ tenemos $P(S_1 = 1) = 1$. Halle las funciones de probabilidad para $m = 2$ y 3.

23. El fabricante de monedas del rey entrega las monedas que manufactura en cajas de 500 monedas y coloca una moneda falsa en cada caja. El rey tiene por costumbre revisar 1 moneda seleccionada al azar en cada caja y revisa 500 cajas cada vez. ¿Cuál es la probabilidad de que encuentre al menos una moneda falsa? ¿Cuál sería si revisa dos monedas de cada caja?

24. Sacamos una mano de trece cartas de un juego de 52. Calcule la probabilidad de que

    a. las pintas se distribuyan 4, 4, 3 y 2 (por ejemplo, cuatro diamantes, cuatro tréboles, tres corazones y dos picas).

    b. las pintas se distribuyan 5, 3, 3 y 2.

25. Tienes un juego de cuatro dados especiales. El primero tiene dos lados con 0 y cuatro lados con 4. El segundo tiene 3 en todos los lados. El tercero tiene cuatro lados iguales a 2 y 6 en los dos lados restantes. El cuarto tiene 1 en tres lados y 5 en los otros tres. Para el juego entre dos personas una escoge el dado que quiere y luego la otra hace lo mismo con los tres restantes. Ambos lanzan su dado y el que saque el mayor resultado gana. Demuestre que no importa cuál dado escoja la primera persona, la segunda siempre puede escoger de modo de tener probabilidad 2/3 de ganar.