Elementos de Probabilidad y Estadística
Problemas VI

Los problemas 4, 10, 14 y 21 son para entregar el miércoles 14/04/09.

1. ¿Cuál es el menor valor de n para el cual la probabilidad de obtener al menos un 6 en una serie de n lanzamientos de un dado es mayor que 3/4?

2. Un fabricante de motos inscribe tres corredores en una carrera. Sea $A_i, i = 1, 2, 3$ el evento definido por "el i-ésimo corredor finaliza la carrera en alguno de los tres primeros lugares". Si los eventos $A_1,\ A_2$ y A_3 son independientes y $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 0,1$ calcule las probabilidades de los siguientes eventos: (a) Ninguno de los corredores termina entre los tres primeros. (b) Al menos uno termina entre los tres primeros. (c) Al menos dos terminan entre los tres primeros. (d) Todos terminan entre los tres primeros.

3. Los eventos $A_1, A_2, \dots$ son independientes y $P(A_j) = p,\ j = 1, 2, \dots$ Halle el menor valor de n para el cual $P(\cup_1^n A_k) \geq p_0$ donde p_0 es un número fijo.

4. Una máquina consiste de 4 componentes conectados en paralelo, de modo que la máquina falla sólo si los cuatro componentes fallan. Supongamos que los componentes son independientes entre sí. Si los componentes tienen probabilidades 0.1; 0.2; 0.3 y 0.4 de fallar cuando la máquina es encendida, ¿cuál es la probabilidad de que funcione al encenderla?

5. En una fábrica de computadoras un inspector revisa un lote de 20 máquinas y encuentra que 3 de ellas necesitan ajustes antes de empacarlas. Otro empleado descuidado mezcla las computadoras que habían sido revisadas, de modo que el inspector tiene que hacerlo otra vez. a. ¿Cuál es la probabilidad de que no haga falta probar más de 17 computadoras? b. ¿Cuál es la probabilidad de que haga falta probar exactamente 17 computadoras?

6. Supongamos que A y B son independientes, y B y C son independientes. (a) ¿Son A y C independientes en general? (b) ¿Es B independiente de $A \cup C$? (c) ¿Es B independiente de $A \cap C$?

7. Se lanza una moneda balanceada n veces. Muestre que la probabilidad condicional de águila en cualquier lanzamiento específico dado que hay k águilas en n lanzamientos es k/n ($k > 0$).

8. Suponga que A y B son eventos tales que $P(A|B) = P(B|A)$, $P(A \cup B) = 1$ y $P(A \cap B) > 0$. Demuestre que $P(A) > 1/2$.

9. Un arquero acierta al centro de la diana con probabilidad 0,9. a) ¿Cuál es la probabilidad de que logre acertar 8 veces si lanza 10 flechas? b) ¿Si lanza flechas hasta acertar 8 veces al centro de la diana, ¿Cuál es la probabilidad de que necesite a lo sumo lanzar 10 flechas?

10. Considere estos dos sistemas de ensayos de Bernoulli: 1) Lanzamos una moneda y águila es éxito; 2) Lanzamos un dado y 6 es éxito. Para cada uno de estos casos calcule $P(A)/P(B)$, donde A: 'el tercer éxito ocurre en el quinto ensayo', B: 'tres de los primeros cinco ensayos resultan en éxito'. Generalice reemplazando 3 por i y 5 por j.

11. Lanzamos cuatro dados, ¿Cuál es la probabilidad de que el mayor número sea 5 y el menor sea 3?

12. Demuestre que si $A_1, \dots A_n$ son eventos independientes definidos en un espacio muestral Ω y $0 < P(A_i) < 1$ para todo i, entonces Ω debe tener al menos 2^n puntos.

13. La caja A tiene dos bolas rojas y tres negras. La caja B tiene cinco rojas y una blanca. Se selecciona una bola al azar de la caja A y se coloca en la caja B y luego se escoge una bola al azar de la caja B. a) ¿Cuál es la probabilidad de que ambas bolas sean rojas? b) ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola sea roja? c) Dado que la segunda bola es roja ¿Cuál es la probabilidad de que la primera también haya sido roja? d) Dado que la segunda bola es blanca ¿cuál es la probabilidad de que la primera haya sido roja?

14. Una fábrica produce 300 automóviles al día. La fábrica compra baterías de dos proveedores. La compañía A le vende 100 baterías al día, de las cuales 99 % funcionan correctamente. Las otras 200 baterías son producidas por la compañía B, de las cuales 5 % son defectuosas. Si seleccionamos un auto al azar de la producción de un día y la batería es defectuosa ¿cuál es la probabilidad de que haya sido producida por la empresa B?

15. Un empleado debe verificar el funcionamiento de una máquina que produce tornillos al inicio del día. Esta máquina necesita repararse una vez cada 10 días, en promedio y cuando necesita repararse, todos los tornillos que produce son defectuosos. Cuando la máquina trabaja adecuadamente, 5 % de los tornillos producidos son defectuosos y aparecen al azar a lo largo de la producción del día. ¿Cuál es la probabilidad de que la máquina esté funcionando bien si a. el primer tornillo que el inspector revisa es defectuoso? b. los dos primeros tornillos que el inspector revisa son defectuosos? c. los tres primeros son defectuosos?

16. Una carta de un juego de naipes se ha perdido. Trece cartas se extraen de las 51 restantes y resultan ser tres diamantes, dos picas, cuatro corazones y cuatro tréboles. Halle la probabilidad de que la carta perdida sea de cada una de las pintas.

17. Resuelva el problema de los puntos cuando los dos jugadores tienen probabilidades p y $q = 1 - p$ de ganar.

18. **Las cajas de cerillos de Banach.** Una persona tiene dos cajas de n cerillos, una en el bolsillo derecho y otra en el izquierdo. Cuando necesita un cerillo escoge una caja al azar hasta que se encuentra una caja vacía. ¿Cuál es la probabilidad de que la otra caja tenga k cerillos? (El celebre matemático polaco Stefan Banach solía reunirse con otrs matemáticos en el Café Escocés en Lwów, Polonia, en donde había un cuaderno en el cual se anotaban los problemas planteados y sus soluciones. Esta libreta se conoce como el Libro Escocés. El problema anterior es el último problema incluido en este libro).

19. **La paradoja de Galton.** Si lanzamos tres monedas al menos dos de ellas son iguales, y la tercera tiene probabilidad 1/2 de caer águila o sol, de modo que la probabilidad de que las tres sean iguales es 1/2. En realidad la probabilidad de que las tres monedas sean iguales es 1/4. ¿Qué está mal en el razonamiento anterior?

20. **El modelo de Pólya.** El matemático polaco G. Pólya propuso el siguiente modelo para el proceso de contagio. Comenzamos con una caja que contiene una bola blanca y otra negra. Cada segundo escogemos una bola al azar de la caja, la reemplazamos y añadimos otra del mismo color. Haga una simulación de este proceso con una computadora y trate de hacer una predicción sobre la proporción de bolas blancas luego de un tiempo largo. ¿Es cierto que las proporciones de bolas de un color dado tienen una tendencia a estabilizarse?

21. En una colección de 65 monedas una de ellas tiene dos águilas y el resto son monedas normales. Si seleccionamos una moneda al azar y al lanzarla sale águila seis veces seguidas, ¿Cuál es la probabilidad de que hayamos escogido la moneda con dos águilas?

22. Te dan dos cajas y cincuenta bolas, la mitad blancas y la otra mitad negras. Debes distribuir las bolas en las cajas sin restricciones pero quieres maximizar la probabilidad de obtener una bola blanca si escoges una caja al azar y luego una bola al azar. ¿Cómo debes distribuir las bolas? Justifica tu respuesta.

23. Lanzamos una moneda n veces y obtenemos k soles. Demuestra que la probabilidad condicional de obtener un sol en cualquier lanzamiento específico, dado que hay k soles en total es k/n.

24. **La paradoja de Simpson.** Un fabricante de focos tiene dos plantas. La planta A vende lotes de focos que consisten de 1000 focos regulares y 2000 focos ahorradores. A través de pruebas de control de calidad se sabe que, en promedio, hay 2 focos regulares y 11 ahorradores defectuosos por lote. En la planta B se venden lotes de 2000 focos regulares y 1000 ahorradores, y en promedio hay 5 regulares y 6 ahorradores defectuosos por lote.

    El gerente de la planta A afirma que ellos son más eficientes pues sus tasas de focos defectuosos son 0.2 % y 0.55 % mientras que para la otra planta son 0.25 % y 0.6 %. Por su parte el gerente de la planta B responde diciendo 'cada lote de 3000 focos que producimos contiene 11 focos defectuosos, comparado con 13 defectuosos para los focos producidos por A, de modo que nuestra tasa de 0.37 % de focos defectuosos es inferior a la de ellos, que es 0.43 %. ¿Quién tiene la razón?

25. El evento A atrae al evento B si $P(B|A) > P(B)$ (ver el ejercicio 3.4.1). a) ¿Es transitiva esta relación? b) Demuestre que si A atrae a B y a C pero repele a $B \cap C$, entonces A atrae a $B \cup C$. c) ¿Es posible que A atraiga a B y a C pero repela a $B \cup C$? d) Demuestre que si $B_1, \ldots B_n$ es una partición dl espacio muestral y A atrae algún B_j entonces debe repeler a algún B_i.