

Elementos de Probabilidad y Estadística

Problemas IV

Los problemas 1, 7, 9 y 12 son para entregar el lunes 8/03/10.

1. Demuestre las siguientes identidades

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0, \quad \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

2. Sea x un elemento de un conjunto A de tamaño $2n$. Cuento los subconjuntos de A de n elementos que incluyen a x y los que lo excluyen. Use esto para demostrar que $\binom{2n}{n} = 2\binom{2n-1}{n-1}$

3. Sea $m = \binom{n}{2}$, demuestre que $\binom{m}{2} = 3\binom{n+1}{4}$.

4. **Fórmula de Van der Monde.** Demuestre que para m, n enteros y $r \leq m \wedge n$, $\sum_k \binom{m}{k} \binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}$

5. Demuestre que $\binom{n}{k} = \sum_{r=1}^n \binom{r-1}{k-1}$

6. Considere todas las poligonales (n, S_n) , $n \geq 0$ que parten del origen – es decir, que $S_0 = 0$ – y que, en cada paso, saltan una unidad hacia arriba o hacia abajo. Dicho de otra manera, $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, donde cada X_i vale 1 ó -1 (ver figura 1 (a)).

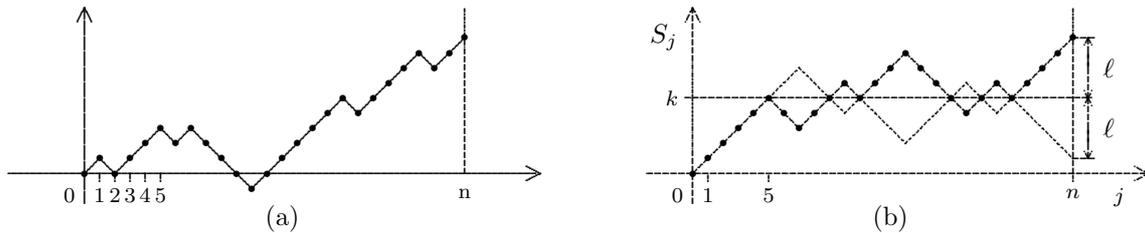


Figura 1

a. ¿Cuántas poligonales podemos construir en el intervalo de tiempo $[0, n]$?

b. ¿Cuántas poligonales satisfacen $S_n = 0$?

c. Usamos la notación $N_{n,h} = \#\{\text{poligonales tales que } S_n = h\}$. Sea k un entero positivo y ℓ un entero no-negativo. Probar que (ver figura 1 (b))

$$N_{n,k+\ell} = \#\{\text{poligonales tales que } S_n = k - \ell, \text{ y para algún } m \leq n \text{ se tiene } S_m = k\}$$

d. Sea k un entero positivo, probar que $\#\{\text{poligonales tales que } S_n = 0, \max_{1 \leq m \leq n} S_m \geq k\} = N_{n,2k}$.

7. Agrupando un conjunto de n^2 puntos de dos maneras distintas, de una prueba combinatoria de $n^2 = 2\binom{n}{2} + n$.

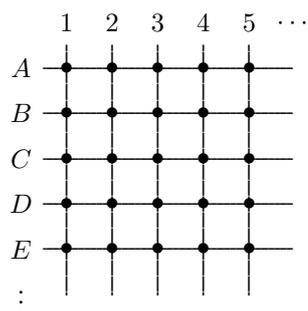
8. Demuestre que $\binom{k}{j} \binom{n}{k} = \binom{n}{j} \binom{n-j}{k-j}$ contando los elementos de un conjunto de dos maneras distintas.

9. Consideremos un tablero cuadrículado como el de la figura 2(a), con las columnas numeradas y las filas indicadas por letras. Supongamos que un punto se mueve sobre los nodos de modo que en cada movimiento se puede dirigir hacia abajo, a la izquierda o a la derecha, pero nunca hacia arriba. El punto comienza en la intersección $J12$ viniendo de la calle I . ¿Cuántas rutas distintas hay para

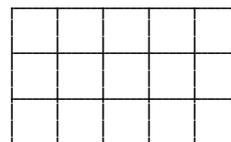
a. llegar a la intersección $L8$ después de 6 movimientos?

b. regresar a $J12$ después de cuatro movimientos?

10. En el tablero del problema anterior queremos ir de $B2$ a $J10$ en el menor número posible de movimientos ¿Cuántas rutas posibles hay?



(a)



(b)

Figura 2

11. ¿Cuántos rectángulos (de cualquier tamaño se pueden formar usando los segmentos de una retícula con m rectas horizontales y n verticales. En la figura 2(b), $m = 3, n = 5$.
12. Un detector de mentiras muestra una señal positiva (indicando una mentira) 10% de las veces que el sujeto dice la verdad y 94% de las veces que miente. Si dos personas son sospechosas de un crimen que se sabe ha cometido uno solo de ellos, y ambos dicen ser inocentes, ¿cuál es la probabilidad de que una señal positiva del detector corresponda al culpable?
13. Se obtiene una muestra de cuatro bolas a partir de una bolsa que contiene doce, de las cuales ocho son blancas. Si el muestreo es sin reposición, halle la probabilidad de que la tercera bola sea blanca, si sabemos que la muestra tiene tres bolas blancas. ¿Que sucede si el muestreo se hace con reposición?
14. Se lanza un par de dados simétricos. Calcule la probabilidad de que la suma sea 7 dado que:
 - a. La suma es impar.
 - b. La suma es mayor que 6.
 - c. El resultado del primer dado fue impar.
 - d. El resultado del segundo dado fue par.
 - e. El resultado de al menos un dado fue impar.
 - f. Los dos dados tuvieron el mismo resultado.
 - g. Los dos dados tuvieron distintos resultados.
 - h. La suma de los dos dados fue 13.
15. Una bolsa contiene cuatro bolas blancas y dos negras y otra contiene tres de cada color. Se escoge una bolsa al azar y luego se selecciona una bola, también al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca?
16. Una caja contiene 10 bombillos, cuatro malos y seis buenos. Los bombillos se prueban de la siguiente manera: se extraen al azar y se prueban sin reemplazarlos. Este proceso se repite hasta localizar los cuatro en mal estado. ¿Cuál es la probabilidad de que el último en mal estado se identifique en la quinta prueba? ¿y en la décima?
17. Cierta vacuna brinda protección parcial contra una enfermedad, de modo que una persona vacunada tiene probabilidad 0.4 de contraer la enfermedad, mientras que para una persona no vacunada esta probabilidad es de 0.8. Si 75% de la población está vacunada, ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que tiene la enfermedad haya sido vacunada?
18. Luego de una serie de pruebas para evaluar un nuevo tipo de examen para detectar cáncer, se ha determinado que 97% de los pacientes cancerosos de un hospital reaccionan positivamente, mientras que sólo 5% de aquellos que no tienen cáncer muestran un resultado positivo. Si 2% de los pacientes del hospital tienen cáncer, ¿cuál es la probabilidad de que un paciente elegido al azar que reacciona positivamente al examen realmente tenga cáncer?
19. Suponga que 5% de los hombres y 25 de cada 10.000 mujeres son daltónicos. Se escoge un daltónico al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre?
20. Una ferretería tiene tres cajas con igual cantidad de tornillos. Dos de las cajas contienen 5% de tornillos defectuosos y la otra contiene 10%. Se escogen dos cajas al azar y se mezclan y de ella se extraen cinco tornillos, uno de los cuales es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que una de las cajas usadas en la mezcla haya sido la que contenía 10% de defectuosos?