Elementos de Probabilidad y Estadística
Problemas III

Los problemas 4, 12, 14 y 20 son para entregar el lunes 1/03/10.

1. ¿De cuántas maneras pueden sentarse cinco hombres y cinco mujeres en una mesa redonda de modo que no haya dos hombres sentados uno al lado del otro?
2. ¿De cuántas maneras pueden sentarse cinco hombres y ocho mujeres en una mesa redonda si los hombres se sientan todos juntos?
3. Seleccionamos cuatro niños al azar y sin reposición de una familia que tiene exactamentes dos varones. La probabilidad de no escoger ningún varón es la mitad de seleccionar ambos ¿Cuántos niños en total hay en la familia?
4. ¿Cuántos números de cinco cifras tienen todas sus cifras de igual paridad (todas pares o todas impares)?
5. En una mesa rectángular los anfitriones se sientan en los extremos. ¿De cuántas maneras se pueden sentar

   a. seis invitados, tres a cada lado?

   b. cuatro mujeres y cuatro hombres, sentados cuatro a cada lado de modo que no haya dos personas del mismo sexo juntas?

   c. ocho invitados, cuatro a cada lado de la mesa, de modo que dos invitados específicos se sienten juntos?
6. ¿De cuántas maneras podemos escoger cuatro cartas de distintas pintas y distintos valores a partir de un juego de 52 cartas?
7. ¿Cuál es la probabilidad de que una mano de bridge (13 cartas) tenga los cuatro aces?
8. ¿Cuántas biyecciones hay de A a B, si ambos conjuntos tienen n elementos?
9. Determine los enteros n tales que $n! > 2^n$.
10. Un restaurante ofrece un menú con las siguientes posibilidades: cuatro sopas para escoger una, dos platillos principales, para escoger uno, dos acompañantes a escoger entre tres tipos de papas, tres tipos de vegetales y una ensalada, Cuatro postres para escoger uno y una bebida de tres.

    a. ¿Cuántas comidas diferentes se pueden ordenar si sólo hay un tipo de papa en cada orden, suponiendo que no se omite ningún tiempo?

    b. ¿Cuántas comidas diferentes se pueden ordenar si sólo hay un tipo de papa en cada orden, y se omite un tiempo distinto del plato principal?
11. Clara dice que es capaz de distinguir Pepsi Cola de Coca Cola por el sabor 75 % de las veces. Pedro piensa que Clara sólo está adivinando. Para determinar quién tiene la razón Clara debe probar 10 vasos en cada uno de los cuales hay alguna de las dos gaseosas, que ha sido seleccionada al azar lanzando una moneda. Clara gana si acierta 7 o más veces. Halle la probabilidad de que Clara gane si en realidad lo que dice es cierto. Halle la probabilidad de que Clara gane si en realidad está adivinando.
12. En un grupo de 12 personas hay dos de apellido Pérez. Si no importa el orden, ¿de cuántas maneras se pueden escoger siete personas a) sin restricciones? b) si se deben incluir los dos Pérez? c) sin incluir ningún Pérez? d) si sólo un Pérez se incluye? e) si al menos un Pérez se incluye? f) si a lo sumo un Pérez se incluye?
13. a. Halle la probabilidad de obtener al menos un seis al lanzar 6 dados. b. Halle la probabilidad de obtener al menos dos seises al lanzar 12 dados. c. Halle la probabilidad de obtener al menos tres seises al lanzar 18 dados. Compare los tres resultados.
14. a. Se colocan 3 bolas numeradas en 3 cajas numeradas. Hallar el número de maneras de hacerlo de modo que: (i) Al menos una caja quede vacía. (ii) Exactamente una caja quede vacía.

    b. Repetir el cálculo hecho en a. cuando hay n bolas y n cajas.

15. Las claves o Números de Identificación Personal (NIP) para las tarjetas bancarias tienen usualmente 4 cifras. Si una computadora asigna estos números al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que las cuatro cifras sean diferentes? ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente dos dígitos repetidos?

16. Los dados para jugar poker consisten de 5 dados con los símbolos $\{9, 10, J, Q, K, A\}$. Al lanzar estos cinco dados ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 'full house' (un trío y una pareja)? ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos pares?

17. Una caja contiene ocho bolas, dos rojas, dos azules, dos blancas y dos negras. Las bolas se separan al azar en dos grupos de cuatro bolas cada uno ¿Cuál es la probabilidad de que cada conjunto tenga una bola de cada color?

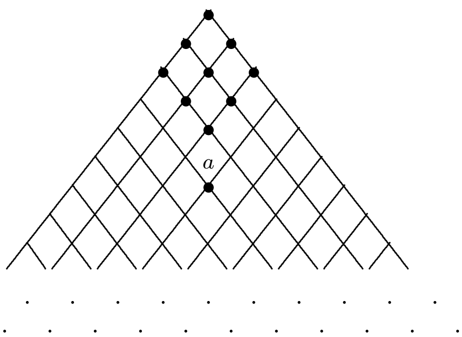
18. Una caja contiene 100 bolas numeradas del 1 al 100. Se seleccionan al azar dos bolas sin reposición ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números sea par?

19. Un amigo te invita jugar Aguila o Sol lanzando su moneda, pero tu piensas que la moneda no está balanceada. Le propones jugar de la siguiente manera: lanzas la moneda dos veces, si el resultado es AS tu ganas, si es SA tu amigo gana y si es AA o SS ninguno gana y se vuelve a lanzar la moneda hasta lograr dos resultados distintos. Supón que la probabilidad de que la moneda salga A es p. Halla la probabilidad de AS, SA, AA, SS con dos lanzamientos de la moneda. Usando esto demuestra que la probabilidad de ganar en el nuevo esquema es $1/2$.

20. Un medicamento tiene una efectividad desconocida p. Para estimar p se aplica el medicamento a n pacientes y se encuentra que resultó efectivo en m de ellos. El *pricipio de máxima verosimilitud* dice que debemos estimar p seleccionando el valor que maximiza la probabilidad de que ocurra lo que ocurrió en el experimento. Suponga que el experimento puede considerarse una serie de ensayos de Bernoulli con probabilidad de éxito p y demuestre que el estimador de máxima verosimilitud para p es m/n.

21. Veintidos caballos de madera distintos se van a colocar en un carrusel en dos círculos concéntricos. ¿De cuántas maneras se puede hacer esto si cada círculo debe tener 11 caballos y cada uno de ellos debe estar al lado de otro caballo?

22. Sea a un número del Triángulo de Pascal. Demuestre que la suma de los números del triángulo que se encuentran dentro del paralelogramo limitado por los lados del triángulo y las diagonales que pasan por a (ver figura) es igual a $a - 1$



23. Demuestre las siguientes identidades

$$a.\ \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = 2^n - 1, \qquad b.\ \sum_{k=1}^{n-1} k = \binom{n}{2}, \qquad c.\ \sum_{k=1}^{n} k(n-k) = \binom{n}{3}.$$

24. Demuestre que $\binom{n}{k}$ y $\binom{2n}{2k}$ tienen la misma paridad, es decir, ambos son pares o ambos son impares.

25. Demuestre que hay infinitas filas del triángulo de Pascal que consisten unicamente de números impares.

26. Demuestre que a partir de un conjunto de n elementos se pueden formar 2^{n-1} subconjuntos con un número par de elementos.