Elementos de Probabilidad y Estadística
Problemas XI

1. Lanzamos una moneda tres veces y definimos las siguientes variables aleatorias: X es el número de águilas, Y es la longitud de la mayor sucesión de águilas en la muestra. Por ejemplo $Y(A,S,A) = 1,\ Y(A,A,S) = 2$. Halle la distribución conjunta, las distribuciones marginales y determine si estas variables son independientes.

2. Lanzamos una moneda cuatro veces y definimos las siguientes variables aleatorias: X vale 1 si hay más águilas que soles y vale 0 si esto no es cierto. Por otro lado, Y representa la longitud de la mayor sucesión de águilas en la muestra. Hallar la distribución conjunta y las marginales. Determine si estas variables son independientes.

3. Una función de probabilidad conjunta está dada por $p_{0,0} = a$, $p_{0,1} = b$, $p_{1,0} = c$, $p_{1,1} = d$, donde necesariamente $a + b + c + d = 1$. Demuestre que una condición necesaria para que haya independencia es que $ad = bc$.

4. Sean X, Y variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas que toman valores $1, 2, 3$ con igual probabilidad. Definimos $Z = X - Y$, $W = X + Y$. Halle la distribución conjunta de estas variables y sus distribuciones marginales. ¿Son independientes?

5. Sean X, Y variables aleatorias con valores en $\{1, 2, \dots, n\}$ y función de probabilidad conjunta $p_{ij} = 1/n^2$. Halle las funciones de probabilidad marginales y determine si las variables son independientes. Calcule $P(X > Y)$ y $P(X = Y)$.

6. En un vivero se siembran n semillas. Cada una de ellas germina de manera independiente con probabilidad α. Las X plantas germinadas son transplantadas a macetas y sobreviven de manera independiente con probabilidad β. sea Y el número de plantas que sobreviven. Halle la función de distribución conjunta de X, Y y las marginales.

7. Consideremos un experimento que tiene resultados $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_8$ con probabilidades correspondientes $0.1; 0.1; 0.2; 0.2; 0.1; 0.1; 0.1; 0.1$. Sea X, Y y Z las variables aleatorias definidas por la siguiente tabla

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8
X	1	2	1	2	1	2	1	2
Y	1	2	3	1	2	3	1	2
Z	1	2	3	4	1	2	3	4

   Halle las distribuciones de probabilidad de X, Y y Z y las distribuciones conjuntas de (X, Y); (X, Z); (Y, Z) y (X, Y, Z).

8. Considere dos eventos A y B tales que $P(A) = 1/4,\ P(B|A) = 1/2$ y $P(A|B) = 1/4$. Definimos las variables X e Y por $X = \mathbf{1}_A,\ Y = \mathbf{1}_B$, donde $\mathbf{1}_E(x)$ vale 1 si $x \in E$ y vale 0 si $x \notin E$. Diga si las siguientes proposiciones son ciertas o falsas.

   a. Las variables aleatorias X e Y son independientes.

   b. $P(X^2 + Y^2 = 1) = 1/4$.

   c. $P(XY = X^2Y^2) = 1$.

   d. La variable aleatoria X tiene distribución uniforme en el intervalo $(0, 1)$.

   e. Las variables X e Y tienen la misma distribución.

9. Sean X, Y variables aleatorias independientes, X con distribución geométrica de parámetro p e Y con distribución geométrica de parámetro r. Demuestre que $Z = \min\{X, Y\}$ tiene distribución geométrica de parámetro $p + r - pr$.

10. Sean X, Y variables aleatorias independientes, X con distribución geométrica de parámetro p e Y con distribución geométrica de parámetro r. Sean $U = \min\{X, Y\}, V = \text{máx}\{X, Y\}, W = V - U$. Halle la distribución conjunta de U y V y la de U y W. Demuestre que estas dos últimas variables son independientes.

11. Sean X, Y variables aleatorias independientes, ambas con distribución geométrica de parámetro p. Demuestre que para $k = 0, 1, \dots, n$.

$$P(X = k | X + Y = n) = \frac{1}{n+1}$$

12. Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ variables aleatorias independientes discretas con distribución uniforme en el conjunto $\{1, 2, \dots, k\}$. Halle la función de distribución conjunta de la variables M_n y m_n definidas por $M_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$; $\quad m_n = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, y las distribuciones marginales. ¿Son independientes?

13. Sean X, Y variables aleatorias discretas con función de probabilidad conjunta

$$p_{ij} = \beta^{i+j+2}, \quad i, j = 0, 1, \dots$$

¿Para cuáles valores de β es esta una función de probabilidad? Halle las funciones de probabilidad marginales y determine si las variables son independientes.

14. Responda la pregunta anterior con la restricción $0 \leq i < j < \infty$ sobre los valores posibles de X e Y.

15. Sea $X_1, \dots, X_n$ una colección de variables aleatorias con la propiedad de que para todo r, $1 \leq r \leq n-1$, la colección $\{X_1, \dots, X_r\}$ es independiente de X_{r+1}. Demuestre que las variable X_i, $1 \leq i \leq n$ son independientes.

16. Sean X, Y variables aleatorias discretas con función de probabilidad conjunta

$$p_{ij} = \frac{C}{(i+j-1)(i+j)(i+j+1)}, \qquad i, j \in \mathbb{N}.$$

Calcule C, halle las funciones de probabilidad marginales y determine si las variables son independientes.

17. Para las variables del ejercicio anterior halle la función de probabilidad de $U = X + Y$ y $V = X - Y$.

18. Sea X e Y variables aleatorias independientes, X con distribución uniforme en $\{1, 2, \dots, n\}$, Y con distribución uniforme en $\{1, 2, \dots, m\}$. Halle la distribución de probabilidad de $Z = X + Y$.

19. Sean X e Y variables aleatorias independientes con distribución de Poisson de parámetros λ y μ. Demuestre que la distribución condicional de X dado que $X + Y = n$ es binomial y halle sus parámetros.

20. Sean X e Y variables aleatorias independientes con distribución binomial, ambas de parámetros n y p y sea $Z = X + Y$. Demuestre que la distribución condicional de X dado que $Z = k$ es hipergeométrica.

21. Sea X, Y, Z variables aleatorias discretas con la probabilidad de que sus valores son distintos con probabilidad 1. Sea $a = P(X > Y)$, $b = P(Y > Z)$, $c = P(Z > X)$.

    a) Demuestre que $\min\{a, b, c\} \leq 2/3$ y dé un ejemplo donde esta cota se alcance.

    b) Demuestre que si X, Y, Z son independientes e idénticamente distribuidas, entonces $a = b = c = 1/2$.

22. Sea X, Y variables aleatorias discretas. Demuestre que son independientes si y sólo si su función de probabilidad conjunta $P(X = i, Y = j) = r_{ij}$ se puede factorizar como el producto $s_i t_j$ de una función de i por una función de j.

23. Sean $X_j, 1 \leq j \leq n$ variables aleatorias independientes simétricas respecto a 0, es decir, X_j y $-X_j$ tienen la misma distribución. Demuestre que para todo x, $P(S_n \geq x) = P(S_n \leq -x)$, con $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

    ¿Es cierta en general la conclusión si no suponemos independencia?

24. Considere un paseo al azar simétrico simple S con $S_0 = 0$. Sea $T = \min\{n \geq 1 : S_n = 0\}$ el instante del primer regreso al origen. Demuestre que

$$P(T = 2n) = \frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}2^{-2n}.$$

25. Considere un paseo al azar simétrico simple S con $S_0 = 0$. Definimos $U = \min\{0 \leq j \leq n : S_{2j} = S_{2n}\}$ el instante de la primera visita a la posición que ocupa en el instante $2n$. Demuestre que para $0 \leq k \leq n$

$$P(U = 2k) = P(S_{2k} = 0)P(S_{2n-2k} = 0).$$