# Elementos de Probabilidad y Estadística
## Problemas X

Los problemas 2, 7, 10 y 13 son para entregar el miércoles 26/05/10.

1. Sean $X, Y$ variables aleatorias con función de probabilidad conjunta
$$r_{ij} = C\frac{i+j}{i!j!}\theta^{i+j},$$
para $i, j \geq 0$ donde $\theta > 0$ es una constante. Halle $C$, las distribuciones marginales de $X$ e $Y$ y $P(X+Y=k)$. ¿Son independientes estas variables aleatorias?

2. Una caja contiene ocho bolas numeradas del 1 al 8. Las primeras cuatro son rojas y las otras blancas. Seleccionamos dos bolas al azar de la caja y definimos las siguientes variables: $X$ es el número de bolas blancas en la muestra, $Y$ es el número de bolas pares y $Z$ el número de bolas en la muestra cuyo número es menor que 6. Halle la distribución conjunta de las variables $(X, Y)$; $(X, Z)$; $(Y, Z)$ y $(X, Y, Z)$. Estudie la independencia de estas variables.

3. Sea $X$ el número de aces en una mano de poker e $Y$ el número de reinas. Halle la función de probabilidad conjunta para estas variables y sus funciones de probabilidad marginales. Determine si son independientes.

4. Lanzamos una moneda tres veces. Sea $X$ el número de águilas en los dos primeros lanzamientos e $Y$ el número de águilas en el tercer lanzamiento. Halle la distribución conjunta de $X, Y$, la distribución de $Z = X + Y$ y la de $W = X - Y$.

5. Sacamos cinco cartas con reposición de un paquete de 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos diamantes y un trébol? ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos ases, dos reinas y un 10?

6. Un componente electrónico puede fallar de cuatro maneras distintas, y las probabilidades respectivas son $p_1 = 0.2; p_2 = 0.15; p_3 = 0.25; p_4 = 0.4$. Si examinamos 10 componentes, ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente tres fallas de tipo 1, dos de tipo 2, dos de tipo 3 y y tres de tipo 4?

7. Las probabilidades de llenar una declaración de impuestos correctamente, con un error que favorezca al fisco, con un error que favorezca al declarante o con ambos tipos de errores son, respectivamente, 0.6; 0.2; 0.15 y 0.05. Calcule la probabilidad de que entre 10 declaraciones de impuestos 5 estén correctas, 3 tengan errores a favor del declarante, 1 tenga un error a favor del fisco y una tenga ambos tipos de errores.

8. A través de un estudio se ha determinado que al llegar a cierto cruce, 50 % de los vehículos continua de frente, 30 % da vuelta a la derecha y el resto da vuelta a la izquierda. Calcule la probabilidad de que de los siguientes cinco automóviles, uno de vuelta a la izquierda, dos a la derecha y los otros dos sigan de frente. Calcule la probabilidad de que entre los siguientes siete automóviles a lo sumo dos den vuelta a la izquierda.

9. Un taller mecánico hace afinaciones para vehículos de 4, 6 y 8 cilindros. Hay dos tipos de afinación en cada caso, según los puntos que se revisen y los cambios que se efectúen. El precio $P$ es $100 \times k$, donde $k$ es el número de cilindros, para el afinamiento normal $(N)$ y $200 \times k$ para el afinamiento especial $(E)$. La siguiente tabla muestra la función de probabilidad conjunta para estas variables.

| | | $K$ | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 4 | 6 | 8 |
| $P$ | $N$ | 0.3 | 0.2 | 0.1 |
| | $E$ | 0.05 | 0.05 | 0.1 |

Halle las funciones de probabilidad marginales para las variables $K$ y $P$. Si $Z$ es el costo total del afinamiento para un carro que va al taller, halle su función de probabilidad.

10. Considere dos variables aleatorias $X$ e $Y$ con distribución conjunta discreta definida por la siguiente tabla para la función de probabilidad conjunta, donde $h = 1/60$.

| | | $X_1$ | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 1 | 2 |
| | 0 | $h$ | $2h$ | $3h$ |
| $X_2$ | 1 | $2h$ | $4h$ | $6h$ |
| | 2 | $3h$ | $6h$ | $9h$ |
| | 3 | $4h$ | $8h$ | $12h$ |

Calcule

a. $P(X \le 1,\ Y \le 1)$ b. $P(X + Y \le 1)$ c. $P(X + Y > 2)$ d. $P(X < 2Y)$

e. $P(X > 1)$ f. $P(X = Y)$ g. $P(X \ge Y | Y > 1)$ h. $P(X^2 + Y^2 \le 1)$

11. Repita el ejercicio anterior para la siguiente función de probabilidad conjunta (de nuevo $h = 1/60$).

| | | $X_1$ | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 1 | 2 |
| | 0 | $h$ | $6h$ | $6h$ |
| $X_2$ | 1 | $2h$ | $8h$ | $9h$ |
| | 2 | $3h$ | $2h$ | $12h$ |
| | 3 | $4h$ | $4h$ | $3h$ |

12. Las funciones de probabilidad marginales de las variables aleatorias discretas $X$ e $Y$ están dadas en la siguiente tabla:

| | | | | X | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |
| | 1 | | | | | | 5/14 |
| | 2 | | | | | | 4/14 |
| Y | 3 | | | | | | 3/14 |
| | 4 | | | | | | 2/14 |
| | 5 | | | | | | 1/14 |
| | | 1/14 | 5/14 | 4/14 | 2/14 | 2/14 | 1 |

Para $i, j$ entre 1 y 5 la probabilidad conjunta $P(X = i, Y = j)$ sólo puede tomar los valores 0 y 1/14. Determine la función de probabilidad conjunta para $X$ e $Y$.

13. Si $A$ es un conjunto medible hemos definido la función $\mathbf{1}_A(\omega)$ como la función que vale 1 si $\omega \in A$ y 0 si no. Demuestre que dos eventos $A$ y $B$ son independientes si y sólo si $\mathbf{1}_A$ y $\mathbf{1}_B$ son variables aleatorias independientes.

14. Demuestre que dos variables aleatorias $X, Y$ son independientes si y sólo si para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$,

$$P(X > x, Y > y) = P(X > x)P(Y > y).$$

15. Una caja contiene 5 bolas numeradas del 1 al 5. Sacamos dos bolas sucesivamente y sin reposición. Sea $X$ el número en la primera bola e $Y$ el número en la segunda. (a) Determine la distribución conjunta de $X, Y$. (b) Halle las distribuciones marginales y determine si las variables son independientes. (c) Calcule $P(X < Y)$.

16. Lanzamos un dado dos veces. Sea $X$ el resultado del primer lanzamiento, $Y$ el mayor de los resultados de los dos lanzamientos. Halle la distribución conjunta y las distribuciones marginales de estas variables. Determine si son independientes.