Elementos de Probabilidad y Estadística

Primer Examen

Parte 2

Respuestas

Para entregar antes de las 12:30 pm del jueves 19 de marzo de 2009.
Este examen es estrictamente individual. Puedes consultar libros o notas de clase y puedes preguntar al profesor y a los ayudantes pero no a tus compañeros.

1. En una caja hay cuatro bolas numeradas del 1 al 4. Sacamos una bola al azar y luego lanzamos una moneda balanceada el número de veces indicado por la bola. Nos interesa el número total de soles en los lanzamientos.

   a) ¿Cuál es un espacio muestral adecuado para este experimento?

   b) Si el número en la bola es 3, ¿Cuál es la distribución de probabilidad del número total de soles?

   c) ¿Cuál es la distribución de probabilidad del número de soles?

   Solución. a) Un espacio muestral posible es $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ donde los números representan el total de soles obtenidos al lanzar las monedas.

   Para resolver los otros incisos llamaremos $N \in \Omega$ al total de soles obtenidos al lanzar las monedas y B_i $i = 1, 2, 3, 4$ al evento 'Sacamos la bola con el número i'. Como la selección de la bola se hace al azar, todos estos eventos tienen la misma probabilidad: $P(B_i) = 1/4$.

   b) Si obtenemos la bola con número 3, el número de soles en tres lanzamientos de una moneda tiene distribución binomial de parámetros $3, 1/2$, de modo que

$$P(N = 0|B_3) = \binom{3}{0}\big(\frac{1}{2}\big)^3; \quad P(N = 1|B_3) = \binom{3}{1}\big(\frac{1}{2}\big)^3; \quad P(N = 2|B_3) = \binom{3}{2}\big(\frac{1}{2}\big)^3;$$

$$P(N = 3|B_3) = \binom{3}{3}\big(\frac{1}{2}\big)^3; \quad P(N = 4|B_3) = 0.$$

   c) Para calcular la distribución de probabilidad sobre Ω usamos la ley de la probabilidad total:

$$P(N) = \sum_{i=1}^{4} P(N|B_i)P(B_i) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} P(N|B_i)$$

   y también el hecho de que si B_i ocurre, N tiene distribución binomial de parámetros $i, 1/2$:

$$P(N = k|B_i) = \binom{i}{k}\big(\frac{1}{2}\big)^i, \quad \text{para } 0 \leq k \leq i,$$

   y vale 0 si $k > i$.

$$\begin{aligned} P(N = 0) &= P(N = 0|B_1)P(B_1) + P(N = 0|B_2)P(B_2) + P(N = 0|B_3)P(B_3) + P(N = 0|B_4)P(B_4) \\ &= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\binom{i}{0}\big(\frac{1}{2}\big)^i = \frac{1}{4}\Big[\big(\frac{1}{2}\big)^1 + \big(\frac{1}{2}\big)^2 + \big(\frac{1}{2}\big)^3 + \big(\frac{1}{2}\big)^4\Big] \\ &= \frac{1}{4}\Big[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\Big] = \frac{8 + 4 + 2 + 1}{64} = \frac{15}{64}. \end{aligned}$$

De manera similar,

$$\begin{aligned}
P(N=1) &= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\binom{i}{1}\big(\frac{1}{2}\big)^i = \frac{1}{4}\Big[\big(\frac{1}{2}\big)^1 + 2\big(\frac{1}{2}\big)^2 + 3\big(\frac{1}{2}\big)^3 + 4\big(\frac{1}{2}\big)^4\Big] \\
&= \frac{1}{4}\Big[\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16}\Big] = \frac{8+8+6+4}{64} = \frac{26}{64}. \\
P(N=2) &= \frac{1}{4}\sum_{i=2}^{4}\binom{i}{2}\big(\frac{1}{2}\big)^i = \frac{1}{4}\Big[\big(\frac{1}{2}\big)^2 + 3\big(\frac{1}{2}\big)^3 + 6\big(\frac{1}{2}\big)^4\Big] \\
&= \frac{1}{4}\Big[\frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{6}{16}\Big] = \frac{4+6+6}{64} = \frac{16}{64}. \\
P(N=3) &= \frac{1}{4}\sum_{i=3}^{4}\binom{i}{3}\big(\frac{1}{2}\big)^i = \frac{1}{4}\Big[\big(\frac{1}{2}\big)^3 + 4\big(\frac{1}{2}\big)^4\Big] \\
&= \frac{1}{4}\Big[\frac{1}{8} + \frac{4}{16}\Big] = \frac{2+4}{64} = \frac{6}{64}. \\
P(N=4) &= \frac{1}{4}\binom{4}{4}\big(\frac{1}{2}\big)^4 = \frac{1}{64}.
\end{aligned}$$

2. En un grupo de 12 personas hay dos de apellido Pérez. Si no importa el orden, ¿de cuántas maneras se pueden escoger siete personas

   a) sin restricciones?
   b) si se deben incluir los dos Pérez?
   c) sin incluir ningún Pérez?
   d) si sólo un Pérez se incluye?
   e) si al menos un Pérez se incluye?
   f) si a lo sumo un Pérez se incluye?

   Solución.
   a) $\binom{12}{7}$. b) $\binom{10}{5}$. c) $\binom{10}{7}$. d) $2\binom{10}{6}$. e) $2\binom{10}{6} + \binom{10}{5}$. f) $2\binom{10}{6} + \binom{10}{7}$.

3. Los dados para jugar poker consisten de 5 dados con los símbolos $\{9, 10, J, Q, K, A\}$ que se lanzan al azar simultáneamente. Describa el espacio muestral para este experimento.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener una pareja (es decir, dos dados con igual valor y los otros tres distintos a ese valor y distintos entre sí)?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener (exactamente) dos pares?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 'full house' (un trío y una pareja)?
   d) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un poker (cuatro dados iguales y el otro distinto)?

   Solución. Un espacio muestral posible es S^5 donde $S = \{9, 10, J, Q, K, A\}$, es decir, los vectores de 5 componentes tomadas del conjunto S.

   a) El número que se repite lo podemos seleccionar de 6 maneras, los otros 3 de $\binom{5}{3}$ y estos cinco números los podemos ordenar de $5!/2!$ maneras porque tenemos un par. El número que obtenemos lo tenemos que dividir entre 6^5 que es el total de resultados posibles:

$$\frac{6\binom{5}{3}5!}{2!6^5} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{3\cdot 2\cdot 2\cdot 6^5} = \frac{25}{54} \approx 0.463$$

   b) El valor común del primer par lo puedo escoger de 6 maneras, el del segundo de 5 y el número restante de 4. Estos cinco números se pueden ordenar de $5!/2!2!2!$ (hay que dividir por 2 tres veces, una vez por cada par y una tercera vez porque los pares se pueden intercambiar entre sí). Este número hay que dividirlo por 6^5:

$$\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 5!}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 6^5} = \frac{25}{108} \approx 0.2315$$

c) El valor común del trío lo puedo escoger de 6 maneras y el del par de 5. Estos cinco números se pueden ordenar de $5!/3!2!$ maneras. Este número hay que dividirlo por 6^5:

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 5!}{3! \cdot 2! \cdot 6^5} = \frac{25}{648} \approx 0.0386$$

d) El valor común se puede escoger de 6 maneras y el otro de 5. Hay $5!/4!$ maneras de ordenar estos cinco numeros y luego hay que dividir por 6^5:

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 5!}{4! \cdot 6^5} = \frac{25}{1296} \approx 0.0193$$

4. El USS Enterprise, regresando a la Tierra luego de una misión, recibe una llamada de auxilio de la estación $\alpha\,35$, que se encuentra bajo ataque de los Klingons. El Enterprise tiene poco combustible y sus motores no se encuentran en estado óptimo. El Capitán J.T. Kirk ordena dirigirse a toda velocidad a la estación, pero el Ingeniero Jefe Scottie le informa que de los tres motores de la nave, sólo uno esta funcionando correctamente. Los otros dos pueden fallar. El estima que la probabilidad de que funcionen los tres es 0.45, mientras que la probabilidad de que funcionen dos es 0.35. El consumo de energía de la nave depende del número de motores que funcionen durante el viaje, afectando la probabilidad de ganar la batalla contra la flota Klingon y salvar la estación. El Sr. Spock estima que estas probabilidades son: 0.9 si funciona un sólo motor, 0.7 si funcionan dos y 0.3 si funcionan los tres.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de ganar la batalla?

   b) Si ganan la batalla, ¿cuál es la probabilidad de que hayan funcionado los tres motores?

   Solución. Definimos los siguientes eventos: G: 'el Enterprise gana la batalla', Mk: 'funcionan k motores', $k = 1, 2, 3$. Entonces sabemos:

$$P(M3) = 0.45; \qquad P(M2) = 0.35; \qquad P(M1) = 0.2;$$
$$P(G|M1) = 0.9; \quad P(G|M2) = 0.7; \quad P(G|M3) = 0.3$$

   a) Por la ley de la probabilidad total,

$$P(G) = P(G|M1)P(M1) + P(G|M2)P(M2) + P(G|M3)P(M3) = 0.9 \cdot 0.2 + 0.7 \cdot 0.35 + 0.3 \cdot 0.45 = 0.56$$

   b) Por el teorema de Bayes

$$P(M3|G) = \frac{P(G|M3)P(M3)}{P(G)} = \frac{0.3 \cdot 0.45}{0.56} = 0.241$$

5. a) Demuestre que para $k \leq n$,

$$\binom{n}{k} = \sum_{r=k}^{n} \binom{r-1}{k-1}.$$

   b) Demuestre que para $j < k \leq n$,

$$\binom{k}{j}\binom{n}{k} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}$$

   contando los elementos de un conjunto de dos maneras distintas.

   Solución.

   a) Por la relación de Pascal tenemos que

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Aplicando esta relación iterativamente al ultimos término de la suma obtenemos

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \\
&= \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k} \\
&= \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-3}{k-1} + \binom{n-3}{k} \\
&= \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-3}{k-1} + \cdots + \binom{k-1}{k-1}
\end{aligned}$$

b) Sea A un conjunto con n elementos. Seleccionamos primero un subconjunto con k elementos, que lo podemos hacer de $\binom{n}{k}$ maneras y luego, de este conjunto seleccionado, escogemos j de ellos, que lo podemos hacer de $\binom{k}{j}$ maneras, y los marcamos de alguna manera. En definitiva terminamos con j elementos 'marcados' y $k-j$ 'sin marcar', seleccionados del conjunto A, y hay

$$\binom{n}{k}\binom{k}{j}$$

maneras de hacer esto.

Otra manera de obtener estos conjuntos es seleccionar los j elementos que vamos a 'marcar' directamente a partir de A, que lo podemos hacer de $\binom{n}{j}$ maneras, y luego de los $n-j$ elementos restantes seleccionamos $k-j$ 'sin marcar', que lo podemos hacer de $\binom{n-j}{k-j}$ maneras. En total tenemos

$$\binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}$$

maneras de hacerlo por este método. Por lo tanto tenemos la identidad deseada.