Elementos de Probabilidad y Estadística

Primer Examen

Parte 1
Respuestas

1. (**3 ptos.**) Una caja tiene 10 bolas blancas y dos negras. Se extraen tres bolas al azar.

   a) Describa el espacio muestral si el muestreo se hace con reposición.

   b) Describa el espacio muestral si el muestreo se hace sin reposición.

   c) En cada caso calcule la probabilidad de obtener al menos una bola negra.

   Solución.

   a) Con notación obvia $\Omega = \{bbb, bbn, bnb, nbb, bnn, nbn, nnb, nnn\}$.

   b) $\Omega = \{bbb, bbn, bnb, nbb, bnn, nbn, nnb\}$.

   c) Con reposición: $P(bbb) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0.579$. Por lo tanto,

$$P(\text{al menos una negra}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216} \approx 0.421$$

   Sin reposición: $P(bbb) = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{12\cdot 11\cdot 10} = \frac{6}{11}$. Por lo tanto,

$$P(\text{al menos una negra}) = 1 - \frac{6}{11} = \frac{5}{11}$$

2. (**3 ptos.**) Mostrar que el número de maneras de distribuir r bolas idénticas en n cajas es

$$\binom{n+r-1}{n-1}$$

   Explique por qué esto resuelve el problema de hallar el número de soluciones de la ecuación $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$ bajo la condición de que los x_i sean enteros que satisfacen $x_i \geq 0$.

   Solución. La primera parte fue resuelta en clase: ver problema 8 de la sección 2.10 de las notas.

   Para la segunda basta interpretar x_i como el número de bolas en la i-ésima caja.

3. (**4 ptos.**) a) Defina probabilidad condicional e independencia para eventos.

b) Enuncie y demuestre el Teorema de Bayes.

c) Luego de una serie de pruebas para evaluar un nuevo tipo de examen para detectar cáncer, se ha determinado que 97 % de los pacientes cancerosos de un hospital reaccionan positivamente, mientras que sólo 5 % de aquellos que no tienen cáncer muestran un examen positivo. Si 2 % de los pacientes del hospital tienen cancer, calcular la probabilidad de que un paciente elegido al azar que reacciona positivamente al examen realmente tenga cáncer.

<u>Solución</u>.

c) Con notación obvia: $P(+|C) = 0.97$, $P(+|C^c) = 0.05$, $P(C) = 0.02$. Queremos hallar $P(C|+)$; usando el teorema de Bayes,

$$\begin{aligned} P(C|+) &= \frac{P(+|C)P(C)}{P(+|C)P(C) + P(+|C^c)P(C^c)} \\ &= \frac{0.97 \cdot 0.02}{0.97 \cdot 0.02 + 0.05 \cdot 0.98} = \frac{0.0194}{0.0194 + 0.049} \approx 0.284 \end{aligned}$$