Elementos de Probabilidad y Estadística
Problemas V

Los problemas 8, 11, 14 y 18 son para entregar el lunes 16/03/09.

1. Sea A, B y C eventos con probabilidad estrictamente positiva. Demuestre las siguientes relaciones:
a. $P(A^c \cup B^c) = 1 - P(B)P(A|B)$ b. $P(A \cap B|B \cup C) = P(A \cap B|B)P(B|B \cup C)$
c. $P(B \cap C|A) = P(C|A)P(B|A \cap C)$ si $P(A \cap C \neq 0$ d. $P(A|B)P(B|C)P(C|A) = P(B|A)P(C|B)P(A|C)$
e. $\frac{P(A|A \cup B)}{P(B|A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$

2. Demuestre: $\frac{P(B^c|A)}{P(B)} + \frac{P(A^c)}{P(A)} = \frac{P(A^c|B)}{P(A)} + \frac{P(B^c}{P(B)}$.

3. Tres sucursales de una tienda tienen 8, 12, y 14 empleados de los cuales 4, 7 y 10 son mujeres, respectivamente. (a) Se escoge una sucursal al azar y de ella se escoge un empleado. Si éste es una mujer, ¿cuál es la probabilidad de que ella trabaje en la sucursal con 12 empleados? (b) Si se escoge un segundo empleado de la misma sucursal, ¿cuál es la probabilidad de que se escoja una mujer?

4. Las señales telegráficas "*punto*" y "*raya*" se envían en proporción 3:4. Debido a ciertas condiciones que causan una transmisión muy errática, un punto se transforma en una raya con probabilidad 1/4, y una raya en un punto con probabilidad 1/3. Si se recibe un punto, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido enviado un punto?

5. En una bolsa hay cinco bolas blancas y tres negras y en otra hay tres blancas y siete negras. Se escoge una bolsa al azar y se selecciona una bola, ¿cuál es la probabilidad de que sea blanca?

6. La caja I contiene 50 tornillos y 70 clavos. La caja II contiene 40 tornillos y 20 clavos. (a) Calcule la probabilidad de extraer un tornillo si se selecciona una caja al azar y luego se extrae un objeto. (b) Calcule la probabilidad de extraer un tornillo si se mezclan los contenidos de ambas cajas y luego se extrae un objeto. (c). Si se selecciona una caja al azar y luego se extrae un objeto que resulta ser un tornillo, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la caja I?

7. Lanzamos una moneda repetidamente hasta que obtener sol diez veces. (a) ¿Cuál es la probabilidad de no haber obtenido dos águilas en sucesión para ese momento? (b) ¿Cuál es la probabilidad de no haber obtenido dos soles en sucesión para ese momento?

8. Se extrae una bola de una caja que contiene cuatro blancas y dos negras. Si la bola es blanca se la deja fuera de la bolsa, mientras que si es negra se la vuelve a colocar dentro. Extraemos luego otra bola. Sea A el evento "la primera bola es blanca" y B = "la segunda bola es blanca". Diga si las siguientes proposiciones son ciertas o falsas:
a. $P(A) = 2/3$ b. $P(B) = 3/5$
c. $P(B|A) = 3/5$ d. $P(A|B) = 9/4$
e. Los eventos A y B son disjuntos.

9. Lanzamos una moneda tres veces y consideramos los siguientes eventos: A: el primer lanzamiento es águila, B: el segundo lanzamiento es sol, C: el tercer lanzamiento es águila, D: los tres lanzamientos son iguales, E: hay exactamente un águila en los tres lanzamientos.
a. ¿Cuáles de los siguientes eventos son independientes? (i) A, B (ii) A, D (iii) A, E (iv) D, E.
b. ¿Cuáles de los siguientes tríos de eventos son independientes? (i) A, B, C (ii) A, B, D (iii) C, D, E.

10. Sean A y B eventos disjuntos. Demuestre que si A y B son independientes, alguno de los dos tiene probabilidad 0.

11. De un ejemplo de tres eventos A, B, C tales que $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ pero $P(A^c \cap B^c \cap C^c) \neq P(A^c)P(B^c)P(C^c)$.

12. Demuestre que si
$$\frac{P(A)}{P(A \cap B)} + \frac{P(B)}{P(A \cap B)} = \frac{1}{P(A)}\frac{1}{P(B)},$$
entonces A y B son independientes.

13. Sea $A,\ B$ y C eventos independientes y $P(C) \neq 0$. Demuestre:

    a. $P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$. b. $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C)$.

    c. $P(A|B \cap B) = P(A)$ siempre que $P(B \cap C) \neq 0$.

14. Sean $G = \{1, 2, 3\},\ H = \{4, 5, 6\}$ Lanzamos dos dados y sean los eventos A : 'el primer dado cae en H, B :'El segundo dado cae en H, C : un dado cae en G y el otro en H, D : el total es cuatro, E : el total es cinco y F : el total es siete. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son ciertas?

    a. A y F son independientes.
    b. A y D son independientes.
    c. A y E son independientes.
    d. $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$.
    e. A y C son independientes.
    f. C y E son independientes.
    g. $P(A \cap C \cap E) = P(A)P(C)P(E)$.
    h. A, C y E son independientes.

15. (a) De un ejemplo de tres eventos A, B y C tales que $P(A\cap B\cap C) = P(A)P(B)P(C)$ pero $P(A^c\cap B^c\cap C^c) \neq P(A^c)P(B^c)P(C^c)$. (b) Demuestre que si $P(A\cap B\cap C) = P(A)P(B)P(C)$; $P(A^c\cap B\cap C) = P(A^c)P(B)P(C)$; $P(A\cap B^c\cap C) = P(A)P(B^c)P(C)$ y $P(A\cap B\cap C^c) = P(A)P(B)P(C^c)$ entonces A, B y C son independientes.

16. Lanzamos un dado cinco veces, (a) Si el dado sale 1 al menos una vez, ¿cuál es la probabilidad de que salga 1 al menos dos veces? (b) Si el primer lanzamiento due 1, ¿cuál es la probabilidad de que salga 1 al menos dos veces?

17. Lanzamos una moneda repetidamente hasta que sol haya ocurrido diez veces. a) ¿Cuál es la probabilidad de que para ese momento no hayan ocurrido dos águilas seguidas? b) ¿Cuál es la probabilidad de que para ese momento no hayan ocurrido dos soles seguidas?

18. Sea $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$ y $P(a) = 1/8,\ P(b) = 5/16,\ P(c) = P(d) = P(e) = 3/16$. Sean $A = \{a, d, e\}$, $B = \{a, c, e\}$ y $C = \{a, c, d\}$. Demuestre que $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ pero ningún par de eventos son independientes.

19. Se toma una muestra de cinco transistores producidos por una máquina que en promedio produce 20 % de transistores defectuosos. (a) Calcule la probabilidad de que si seleccionamos un transistor de la muestra, éste resulte defectuoso. (b) Suponga que seleccionamos al azar un transistor de la muestra y resulta defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que un segundo transistor seleccionado al azar resulte defectuoso?

20. Si $A_1, \ldots, A_n$ son eventos independientes, muestre que

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - (1 - P(A_1))(1 - P(A_2)) \cdots (1 - P(A_n)).$$

21. (a) Si sabemos que una mano de poker tiene al menos tres aces ¿cuál es la probabilidad de que tenga los cuatro? (b) Si sabemos que una mano de poker tiene los aces de corazón, trébol y diamante ¿cuál es la probabilidad de que también tenga el as de pica? (c) Halle la probabilidad de que una mano de poker tenga los dos aces negros dado que tiene al menos tres aces.

22. En un closet hay tres pares de medias blancas y dos de media negras. Las medias con todas nuevas y del mismo estilo y tamaño. Si seleccionamos dos medias al azar, ¿cuál es la probabilidad de que formen un par? Resuelva el mismo problema cambiando media por zapatos.

23. En un closet tenemos seis pares diferentes de zapatos. Si sacamos cinco zapatos al azar ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos un par de zapatos?

24. Una muestra de tamaño 4 se extrae con reposición de una bolsa que contiene 6 bolas, de las cuales 4 son blancas. Sea A el evento "exactamente una de las dos primeras bolas extraídas es blanca" y sea B = "la cuarta bola es blanca". ¿Son A y B independientes? ¿Qué sucede si el muestreo se realiza sin reposición?

25. Considere de nuevo el ejercicio anterior y definamos C como el evento "exactamente dos de las bolas extraídas son blancas" ¿Son $A,\ B$ y C independientes? ¿Son B y C independientes?

26. Sean A y B eventos independientes tales que con probabilidad 1/6 ocurren simultáneamente, y con probabilidad 1/3 ninguno de ellos ocurre. Halle $P(A)$ y $P(B)$. ¿Están determinadas de forma única estas probabilidades?