Elementos de Probabilidad y Estadística
Problemas XIII

Los problemas 4, 13, 20 y 27 son para entregar el miércoles 10/06/09.

1. Se escriben n cartas y sus respectivos sobres, y se ensobran las cartas al azar, de modo que la probabilidad de cualquiera de las posibles permutaciones de las cartas, es la misma. Calcular la esperanza y la varianza del número de cartas que se ensobran correctamente.

   Sugerencia. Escribir Y como $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$, donde

   $$X_i = \begin{cases} 1 & \textit{si la i-ésima carta va en el i-ésimo sobre} \\ 0 & \textit{en caso contrario.} \end{cases}$$

2. Se considera un conjunto de n personas. Calcular el valor esperado del número de días del año en que cumplen años exactamente k de ellos. Suponga que el año tiene 365 días, que todas las distribuciones posibles son igualmente probables y que $n \geq k$.

3. Una persona con n llaves trata de abrir una puerta probando las llaves sucesiva e independientemente. Calcule la esperanza y la varianza del número ν de intentos requeridos hasta encontrar la llave correcta, suponiendo que ésta es una sola, en las dos situaciones siguientes.

   (a) Si la selección de las llaves es con reposición, es decir, que una llave inservible no es quitada del lote, una vez probada. (b) Si la selección es sin reposición.

4. Se lanza un dado n veces. Sea X_i el número de veces que se obtiene el resultado i. Calcular la covarianza de X_1 y X_6.

5. En un estanque en el que originalmente hay n peces, se pesca sucesivamente por medio de redes, que retiran $n_1,\ n_2, \dots,$ donde n_k denota el número (aleatorio) de peces extraídos la k-ésima vez. Suponiendo que la probabilidad de que cada pez sea capturado es p, calcular la esperanza matemática del número de peces extraídos en la n-ésima ocasión.

6. Una bolsa contiene bolas numeradas de 1 a N. Sea X el mayor número obtenido en n extracciones al azar y con reposición, donde n es un número fijo.

   (a) Hallar la distribución de probabilidad de X.

   (b) Calcular $\mathrm{E}(X)$ y probar que si N es grande, $\mathrm{E}(X)$ es aproximadamente igual a $N/(n+1)$.

   (c) Hallar $\mathrm{E}(X^2)$ y deducir una expresión asintótica para $\mathrm{Var}(X)$ cuando $N \to \infty$.

7. Calcular $\mathrm{E}(X^3)$ donde X tiene distribución binomial con parámetros (n, p).

8. Sea X, Y variables aleatorias discretas con función de probabilidad

   $$p_{ij} = \frac{1}{1 + 2n(n+1)}, \quad \text{para } |i - j| \leq n, |i + j| \leq n.$$

   Demuestre que X e Y son independientes y que $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

9. Sea X, Y variables independientes e idénticamente distribuidas con distribución normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Halle media y varianza de la variable $Z = \text{máx}(X, Y)$. (Ayuda: si x, y son números reales demuestre que $2\,\text{máx}(x, y) = |x - y| + x + y$).

10. Sea X una variable con distribución $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Halle media y varianza de $|X - c|$ cuando (a) c es una constante dada, (b) $\sigma = \mu = c = 1$, (c) $\sigma = \mu = 1, c = 2$.

11. Calcule media y varianza para las distribuciones de los ejercicios 18, 19, 21, 22, 24, 25, 26, 29 y 30 del Capítulo 4.

12. En el ejercicio 31 del capítulo 4 vimos que de acuerdo a la ley de Maxwell, la velocidad v de una molécula de gas de masa m a temperatura absoluta T es una variable aleatoria con densidad

$$f_v(x) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\alpha^3} x^2 e^{-x^2/k^2}$$

para $x > 0$ con $\alpha = (2kT/m)^{1/2}$ y k es la constante de Boltzman. Halle media y varianza de (a) la velocidad v de la molécula, (b) la energía cinética $E = mv^2/2$ de la molécula.

13. Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Calcular $\mathrm{E}(Y)$ cuando (a) $Y = \mathrm{sen} X$. (b) $Y = \cos X$ (c) $Y = 3X^2 + 2$ (d) $Y = 1/|X|^\alpha$ En el último caso, ¿para cuáles valores de α se tiene que $\mathrm{E}(Y) < \infty$?

14. Calcular la esperanza y la varianza de las distribuciones cuyas densidades se indican a continuación:

$$(a)\ f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \qquad (b)\ f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x < 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

15. Sea X una variable con distribución exponencial. (a) Halle $P(\mathrm{sen}\, X > 1/2)$, (b) $\mathrm{E}(X^n)$ para $n \geq 1$.

16. La duración T de cierto tipo de llamadas telefónicas satisface la relación

$$P(T > t) = ae^{-\lambda t} + (1 - a)e^{-\mu t}, \quad t \geq 0,$$

donde $0 \leq a \leq 1, \lambda > 0, \mu > 0$ son constantes. halle media y varianza para T.

17. El tiempo de vida de cierto componente electrónico tiene distribución exponencial con parámetro $\lambda = 0.01$. Calcule el tiempo de vida promedio. Si el aparato ha durado 50 horas, ¿cuál es el valor esperado del tiempo de vida que le queda?

18. Escogemos n puntos al azar en $[0, 1]$ con distribución uniforme. Sea $m_n = \min\{X_1, \dots, X_n\}$, $M_n = \text{máx}\{X_1, \dots, X_n\}$, $R_n = M_n - m_n$. Halle el valor esperado de estas tres variables aleatorias.

19. La proporción de tiempo que una máquina trabaja durante una semana de 40 horas es una variable aleatoria con densidad $f(x) = 2x$ para $0 \leq x \leq 1$. Halle $\mathrm{E}(X)$ y $\mathrm{Var}(X)$. La ganancia semanal Y para esta máquina está dada por $Y = 200X - 60$; determine $\mathrm{E}(Y)$ y $\mathrm{Var}(Y)$.

20. Sea X una variable aleatoria con densidad $f(x) = Cx^{a-1}e^{-x^a}$, $x \geq 0$. Halle el valor de C y calcule $\mathrm{E}(X)$ y $\mathrm{Var}(X)$.

21. Sea X una variable aleatoria con densidad $f(x) = 6x(1 - x)$ para $0 < x < 1$. Compruebe que f es una densidad y obtenga media y varianza para esta distribución.

22. Para ciertas muestras de minerales la proporción de impurezas por muestra X es una variable aleatoria con densidad dada por $f(x) = 1.5x^2 + x$ para $0 \leq x \leq 1$. El valor en pesos de cada muestra es $Y = 5 - 0.5X$. Encuentre el valor esperado y la varianza de Y

23. Sea X una variable aleatoria con densidad $f(x) = |\,\mathrm{sen}(x)|/4$ para $0 \leq x \leq 2\pi$. Calcule $\mathrm{E}(X)$.

24. La proporción de tiempo por día en que todas las cajas registradoras están ocupadas a la salida de cierto supermercado es una variable aleatoria X con una densidad $f(x) = Cx^2(1 - x)^4$ para $0 \leq x \leq 1$. Determine el valor de C y $\mathrm{E}(X)$.

25. **Distribución de Pareto** La distribución de Pareto con parámetros r y A, $r > 0$, $A > 0$, es aquella que tiene la densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{rA^r}{x^{r+1}} & \text{si } x \geq A, \\ 0 & \text{si } x < A. \end{cases}$$

(a) Calcular la esperanza y la varianza de esta distribución de probabilidad.

(b) Calcular y graficar la función

$$Q(y) = F(\mu + y\sigma) - F(\mu - y\sigma)$$

para $y \geq 0$ donde μ es la esperanza y σ^2 la varianza halladas en a, y F es la función de distribución de probabilidad de Pareto, en el caso $A = 1,\ r = 3$.

26. **Distribución Beta** Sea X una variable aleatoria con densidad

$$f(x) = Cx^{a-1}(1-x)^{b-1}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Halle el valor de C y calcule $\mathrm{E}(X)$ y $\mathrm{Var}(X)$.

27. En un proceso de manufactura se ensamblan cuantro componente sucesivamente de longitudes X_1, X_2, X_3 y X_4, respectivamente con $\mathrm{E}(X_1) = 20,\ \mathrm{E}(X_2) = 30,\ \mathrm{E}(X_3) = 40,\ \mathrm{E}(X_4) = 60$ y $\mathrm{Var}(X_j) = 4$ para $J = 1, 2, 3, 4$. Halle la media y varianza para la longitud total $L = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ (a) si las longitudes de los componentes no están correlacionadas, (b) si $\rho(X_j, X_k) = 0.2$ para $1 \leq j < k \leq 4$.

28. **Distribución de Rayleigh** Una variable tiene distribución de Rayleigh si su densidad es

$$f(x) = \frac{2x}{\theta} e^{-x^2/\theta}$$

para $x > 0$. Calcule $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$ y obtenga la densidad de $Y = X^2$.

29. **Distribución de Laplace** Una variable X tiene distribución de Laplace si su densidad está dada por

$$f(x) = \frac{1}{2\beta} \exp\Big(-\frac{|x-\alpha|}{\beta}\Big), \quad x \in \mathbb{R},$$

para ciertas constantes α y $\beta > 0$. Halle media y varianza para una variable con esta distribución.

30. El tiempo de vida de ciertos focos tiene distribución de Rayleigh con función de distribución

$$F(x) = 1 - \exp\Big(\frac{x^2}{300}\Big), \quad \text{para } x > 0.$$

Hallar la densidad de la variable aleatoria $Y = X^2$ y su valor esperado.

31. Sea X una variable aleatoria con tercer momento finito $\mathrm{E}(|X|^3) < \infty$). Definimos el coeficiente de asimetría de X, $\alpha(X)$ por

$$\alpha(X) = \frac{\mathrm{E}(X-\mu)^3}{\sigma^3}$$

donde $\mu = \mathrm{E}(X)$ y $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$.

(a) Demuestre que para cualquier variable X se tiene que

$$\alpha(X) = \frac{\mathrm{E}(X^3) - 3\mu\,\mathrm{E}(X^2) + 2\mu^3}{\sigma^3}$$

Halle $\alpha(X)$ si X tiene distribución

(b) Bernoulli con parámetro p.

(c) Poisson con parámetro λ.

(d) Geométrica con parámetro p.

(e) Demuestre que si $X_1, \dots, X_n$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas entonces

$$\alpha(X_1 + \cdots + X_n) = \frac{\alpha(X_1)}{\sqrt{n}}.$$

(f) Halle $\alpha(X)$ si X tiene distribución binomial.

32. Un sistema permite establecer comunicaciones de acuerdo al diagrama 6.1. Cada bloque rectangular demora una unidad de tiempo y T es la variable aleatoria que indica el tiempo que se demora en establecer una comunicación buena.

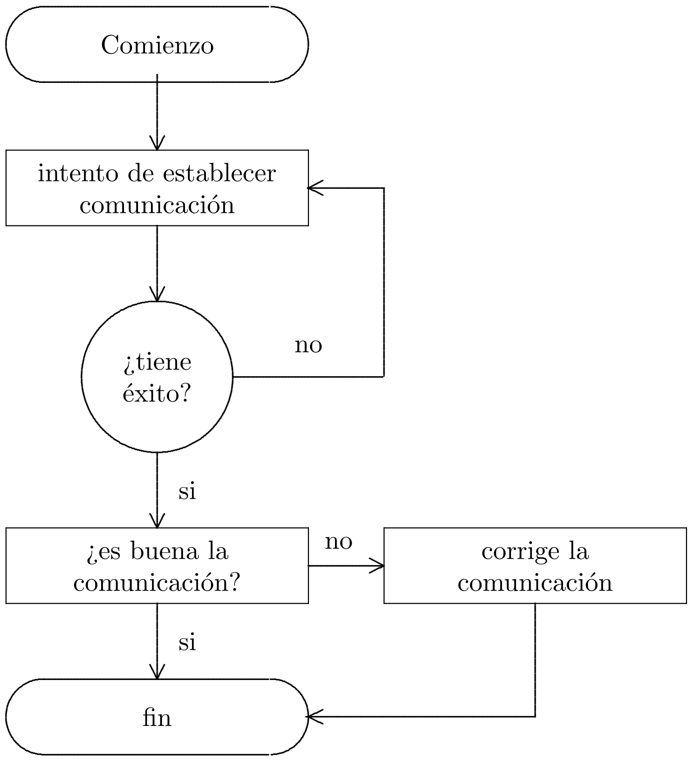

Diagrama 6.1

Se supone que los intentos para establecer comunicación son independientes y que la probabilidad de éxito en cada uno es p. Una vez establecida, la comunicación puede ser buena o mala, y la probabilidad de que sea buena es b. Si es mala, en una operación más se corrige y deviene buena. Calcular la función de probabilidad de T y su esperanza matemática.