Elementos de Probabilidad y Estadística
Problemas X

Los problemas 1, 8, 11 y 14 son para entregar el miércoles 20/05/09.

1. Sean X, Y variables aleatorias con función de probabilidad conjunta
$$r_{ij} = C\frac{i+j}{i!j!}\theta^{i+j},$$
para $i, j \geq 0$ donde $\theta > 0$ es una constante. Halle C, las distribuciones marginales de X e Y y $P(X+Y=k)$. ¿Son independientes estas variables aleatorias?

2. Sea $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ y P la distribución uniforme en Ω (todos los puntos tienen igual probabilidad). Definimos las variables X, Y y Z de la siguiente manera: $X(\omega_1) = Y(\omega_2) = Z(\omega_3) = 1$, $X(\omega_2) = Y(\omega_3) = Z(\omega_1) = 2$, $X(\omega_3) = Y(\omega_1) = Z(\omega_2) = 3$. Demuestre que estas tres variables tienen la misma función de probabilidad. Halle las funciones de probabilidad de $X+Y$, $Y+Z$ y $X+Z$.

3. Una caja contiene ocho bolas numeradas del 1 al 8. Las primeras cuatro son rojas y las otras blancas. Seleccionamos dos bolas al azar de la caja y definimos las siguientes variables: X es el número de bolas blancas en la muestra, Y es el número de bolas pares y Z el número de bolas en la muestra cuyo número es menor que 6. Halle la distribución conjunta de las variables (X, Y); (X, Z); (Y, Z) y (X, Y, Z). Estudie la independencia de estas variables.

4. Sea X el número de aces en una mano de poker e Y el número de reinas. Halle la función de probabilidad conjunta para estas variables y sus funciones de probabilidad marginales. Determine si son independientes.

5. Lanzamos una moneda tres veces. Sea X el número de águilas en los dos primeros lanzamientos e Y el número de águilas en el tercer lanzamiento. Halle la distribución conjunta de X, Y, la distribución de $Z = X + Y$ y la de $W = X - Y$.

6. Sacamos cinco cartas con reposición de un paquete de 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos diamantes y un trébol? ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos ases, dos reinas y un 10?

7. Un componente electrónico puede fallar de cuatro maneras distintas, y las probabilidades respectivas son $p_1 = 0.2; p_2 = 0.15; p_3 = 0.25; p_4 = 0.4$. Si examinamos 10 componentes, ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente tres fallas de tipo 1, dos de tipo 2, dos de tipo 3 y y tres de tipo 4?

8. Las probabilidades de llenar una declaración de impuestos correctamente, con un error que favorezca al fisco, con un error que favorezca al declarante o con ambos tipos de errores son, respectivamente, $0.6; 0.2; 0.15$ y 0.05. Calcule la probabilidad de que entre 10 declaraciones de impuestos 5 estén correctas, 3 tengan errores a favor del declarante, 1 tenga un error a favor del fisco y una tenga ambos tipos de errores.

9. A través de un estudio se ha determinado que al llegar a cierto cruce, 50 % de los vehículos continua de frente, 30 % da vuelta a la derecha y el resto da vuelta a la izquierda. Calcule la probabilidad de que de los siguientes cinco automóviles, uno de vuelta a la izquierda, dos a la derecha y los otros dos sigan de frente. Calcule la probabilidad de que entre los siguientes siete automóviles a lo sumo dos den vuelta a la izquierda.

10. Un taller mecánico hace afinaciones para vehículos de 4, 6 y 8 cilindros. Hay dos tipos de afinación en cada caso, según los puntos que se revisen y los cambios que se efectúen. El precio P es $100 \times k$, donde k es el número de cilindros, para el afinamiento normal (N) y $200 \times k$ para el afinamiento especial (E). La siguiente tabla muestra la función de probabilidad conjunta para estas variables.

		K		
		4	6	8
P	N	0.3	0.2	0.1
	E	0.05	0.05	0.1

Halle las funciones de probabilidad marginales para las variables K y P. Si Z es el costo total del afinamiento para un carro que va al taller, halle su función de probabilidad.

11. Considere dos variables aleatorias X e Y con distribución conjunta discreta definida por la siguiente tabla para la función de probabilidad conjunta, donde $h = 1/60$.

		X_1		
		0	1	2
	0	h	$2h$	$3h$
X_2	1	$2h$	$4h$	$6h$
	2	$3h$	$6h$	$9h$
	3	$4h$	$8h$	$12h$

Calcule

a. $P(X \leq 1,\ Y \leq 1)$ b. $P(X+Y \leq 1)$ c. $P(X+Y > 2)$ d. $P(X < 2Y)$

e. $P(X > 1)$ f. $P(X = Y)$ g. $P(X \geq Y|Y > 1)$ h. $P(X^2 + Y^2 \leq 1)$

12. Repita el ejercicio anterior para la siguiente función de probabilidad conjunta (de nuevo $h = 1/60$).

		X_1		
		0	1	2
	0	h	$6h$	$6h$
X_2	1	$2h$	$8h$	$9h$
	2	$3h$	$2h$	$12h$
	3	$4h$	$4h$	$3h$

13. Las funciones de probabilidad marginales de las variables aleatorias discretas X e Y están dadas en la siguiente tabla:

				X			
		1	2	3	4	5	
	1						5/14
	2						4/14
Y	3						3/14
	4						2/14
	5						1/14
		1/14	5/14	4/14	2/14	2/14	1

Para i, j entre 1 y 5 la probabilidad conjunta $P(X = i, Y = j)$ sólo puede tomar los valores 0 y 1/14. Determine la función de probabilidad conjunta para X e Y.

14. Si A es un conjunto medible hemos definido la función $\mathbf{1}_A(\omega)$ como la función que vale 1 si $\omega \in A$ y 0 si no. Demuestre que dos eventos A y B son independientes si y sólo si $\mathbf{1}_A$ y $\mathbf{1}_B$ son variables aleatorias independientes.

15. Demuestre que dos variables aleatorias X, Y son independientes si y sólo si para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$,

$$P(X > x, Y > y) = P(X > x)P(Y > y).$$

16. Una caja contiene 5 bolas numeradas del 1 al 5. Sacamos dos bolas sucesivamente y sin reposición. Sea X el número en la primera bola e Y el número en la segunda. (a) Determine la distribución conjunta de X, Y. (b) Halle las distribuciones marginales y determine si las variables son independientes. (c) Calcule $P(X < Y)$.

17. Lanzamos un dado dos veces. Sea X el resultado del primer lanzamiento, Y el mayor de los resultados de los dos lanzamientos. Halle la distribución conjunta y las distribuciones marginales de estas variables. Determine si son independientes.