Capítulo 2

Teoría Combinatoria

La Teoría Combinatoria es la rama de las matemáticas que se ocupa del estudio de las formas de contar. Aparte del interés que tiene en sí misma, la combinatoria tiene aplicaciones de gran importancia en otras áreas, y en particular a la Teoría de Probabilidades.

2.1. Dos Principios Básicos.

Comencemos por considerar algunos problemas sencillos.

Problema 1. *En una tienda hay cinco modelos de camisa y tres de pantalón. ¿Cuántos conjuntos distintos de pantalón y camisa podemos comprar?*

▶ La camisa la podemos elegir de cinco maneras distintas. Para cada una de ellas podemos escoger el pantalón de tres maneras distintas. Por lo tanto hay $5 \times 3 = 15$ maneras de escoger un pantalón y una camisa. ▲

Problema 2. *Las ciudades A, B, y C están conectadas según lo muestra la figura 2.1: hay seis caminos de A a B y cuatro de B a C. ¿De cuántas maneras podemos ir de A a C?*

▶ Para cada camino que escojamos entre A y B podemos escoger cuatro para continuar hasta C. Como hay seis caminos entre A y B la respuesta es $6 \times 4 = 24$.

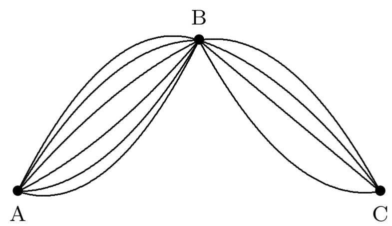

Figura 2.1

◀

Problema 3. *El conjunto $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ tiene k elementos mientras que $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ tiene n. ¿Cuántos elementos tiene el producto cartesiano $A \times B$?*

▶ El producto cartesiano $A \times B$ está formado por todos los pares ordenados (a, b) donde el primer elemento, a, está en A y el segundo, b, está en B. Para cada uno de los k elementos de A que tomemos como primer miembro del par hay n posibilidades para escoger el segundo a partir de los elementos de B. Por lo tanto tendremos $k \times n$ pares ordenados. ▲

Los tres problemas anteriores tienen características similares: Se trata de escoger dos elementos, cada uno de un conjunto distinto y queremos contar el número de maneras de hacer esto. El resultado general puede enunciarse de la siguiente manera:

Principio de Multiplicación. *Si tenemos dos conjuntos de k y n elementos, respectivamente, y queremos escoger dos elementos de modo que uno sea del primero y el otro del segundo, esto lo podemos hacer de $k \times n$ maneras.*

El principio de multiplicación puede ser aplicado reiteradamente:
Problema 4. *En la tienda del problema 1 hay también cuatro modelos distintos de zapatos. ¿De cuántas maneras podemos escoger un conjunto de camisa, pantalón y zapatos?*

► Podemos ahora comenzar con cualquiera de los 15 conjuntos de camisa y pantalón del problema 1. Hay cuatro maneras de completarlo escogiendo un par de zapatos. Por lo tanto el número de posibles conjuntos de camisa, pantalón y zapatos es $15 \times 4 = 60$. ▲

Problema 5. *Una costurera tiene tres botones, cinco agujas y ocho tipos de hilo. ¿De cuántas maneras puede escoger un objeto de cada tipo?*

► $3 \times 5 \times 8 = 120$. ▲

Veamos ahora otro tipo de problema.
Problema 6. *Si además de las ciudades A, B y C del problema 2 tenemos una cuarta ciudad D conectada con las anteriores de la manera que indica la figura 1.2, ¿De cuántas maneras podemos ahora viajar de A a C?*

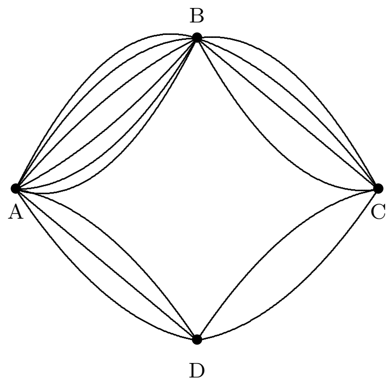

Figura 2.2

► Podemos ir de A a C pasando por B o por D. Sabemos por el problema 2 que hay 24 maneras de ir de A a C pasando por B. Por el Principio de Multiplicación hay $3 \times 2 = 6$ maneras de ir de A a C pasando por D. Por lo tanto, en total hay $24 + 6 = 30$ maneras de viajar de A a C. ▲

Problema 7. *Una persona visita dos tiendas con intención de comprar un pantalón. En la primera tienda hay seis modelos diferentes y para cada uno hay tres colores. En la segunda hay diez modelos y cuatro colores para cada modelo. ¿Entre cuantos pantalones tiene que escoger la persona?*

► En la primera tienda hay $6 \times 3 = 18$ mientras que en la segunda hay $10 \times 4 = 40$. Para hallar el total de pantalones tenemos que sumar estos dos números, y obtenemos $18 + 40 = 58$. ▲

Vemos que en ambos problemas hay dos situaciones que son excluyentes: Para ir de A a C pasamos por B o por D, pero no por ambos. El pantalón lo compramos en la primera tienda o en la segunda, pero no en ambas. Cuando se presenta una situación de este tipo, el número total de soluciones se obtiene sumando las soluciones bajo las distintas alternativas. Este resultado se puede enunciar de la siguiente manera:

Principio de Suma. *Si una situación puede ocurrir de k maneras distintas y una segunda situación excluyente de la primera puede ocurrir de n maneras, entonces existen $k+n$ maneras en las cuales puede ocurrir la primera o la segunda situación.*

El principio de suma también puede ser aplicado reiteradamente.

Problema 8. *En una tienda hay cinco modelos de pantalón, ocho de camisa y cuatro de zapatos. ¿Cuántas maneras hay de comprar dos objetos con nombres distintos?*

► Hay tres casos posibles: Compramos pantalón y camisa; pantalón y zapatos o camisa y zapatos. Es fácil calcular el número de maneras de cada caso: $5 \times 8 = 40$ para el primero, $5 \times 4 = 20$ para el segundo y $8 \times 4 = 32$ para el tercero. En total hay $40 + 20 + 32 = 92$ maneras de comprar dos objetos con nombres distintos. ▲

Problema 9. *¿Cuántos números de a lo sumo tres cifras se pueden formar con los dígitos 3, 4, 7 y 8?*

► Los números que vamos a formar pueden tener una, dos o tres cifras. Veamos por separado cuantos hay de cada tipo y luego sumamos los resultados, de acuerdo al principio de la suma. Es claro que de una cifra hay 4. En el caso de dos cifras la primera puede ser cualquiera de los cuatro dígitos, y la segunda también. Por lo tanto hay $4 \times 4 = 16$ números de dos cifras. De manera similar, hay $4 \times 4 \times 4 = 64$. En total tenemos $4 + 16 + 64 = 84$ números de tres o menos cifras formados con los dígitos 3, 4, 7 y 8. ▲

2.2. Número de subconjuntos de un conjunto finito.

Sea $C = \{c_1, c_2, \dots c_n\}$ un conjunto de n elementos. Denotaremos por $\mathcal{P}(C)$ la familia de todos los subconjuntos de C y lo llamaremos el *conjunto de partes* de C.

Por ejemplo, si $C = \{c_1, c_2, c_3\}$, la familia $\mathcal{P}(C)$ consta de los siguientes conjuntos:

$$\begin{array}{rl}
\emptyset & \text{(vacío es un subconjunto de } C\text{)} \\
\{c_1\}; \{c_2\}; \{c_3\} & \text{(subconjuntos con 1 elemento)} \\
\{c_1, c_2\}; \{c_1, c_3\}; \{c_2, c_3\} & \text{(subconjuntos con 2 elementos)} \\
\{c_1, c_2, c_3\} & \text{(subconjunto con 3 elementos)}
\end{array}$$

Como vemos, en este ejemplo el número de subconjuntos en $\mathcal{P}(C)$ es igual a 8.

Es importante resaltar que al describir un conjunto no importa el orden en el cual se escriben los elementos que pertenecen a él. Así, por ejemplo, $\{c_1, c_2\}$ es el mismo conjunto que $\{c_2, c_1\}$, y no nos interesa el orden en el cual aparecen los elementos de cada subconjunto. Sin embargo, a los efectos del razonamiento posterior, supondremos que los elementos del conjunto C están ordenados de alguna manera arbitraria, que es aquélla en la cual los describimos inicialmente.

En el ejemplo anterior, como el conjunto inicial tenía sólo tres elementos, resultó fácil escribir explícitamente los subconjuntos y contarlos, pero en general esto no va a ser posible. Por lo tanto queremos un método que nos permita hallar este número de manera más sencilla. Una posibilidad que resulta práctica para calcular el número de conjuntos de la familia $\mathcal{P}(C)$, que denotaremos $\sharp\mathcal{P}(C)$, es la siguiente. Supongamos entonces que $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$, vamos tomando uno a uno todos los elementos de C de manera ordenada y decidimos en cada caso si lo incluimos o no en el subconjunto que construimos.

Podemos pensar, entonces, que construir un subconjunto equivale a asignarle a cada elemento un número: le asignamos el 1 si lo incluimos en el subconjunto y el 0 si no lo incluimos. Es decir, que construir todos los subconjuntos de C es equivalente a construir todas las n-uplas de ceros y unos:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \qquad (a_i = 0 \text{ ó } 1)$$

donde $a_i = 0$ significa que **no** hemos incluido el elemento c_i en el subconjunto y $a_i = 1$ significa que **sí** lo hemos incluido. Por lo tanto tenemos una correspondencia biunívoca entre $\mathcal{P}(C)$ y el conjunto de n-uplas

$$A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_i = 0 \text{ ó } 1\} ,$$

correspondencia que asocia a cada subconjunto $M \subset C$ la n-upla que tiene un 1 en el lugar i sí, y sólo sí, $c_i \in M$.

Por ejemplo, en el caso del conjunto $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ de 3 elementos, si $M = \{c_1\}$ la terna que le corresponde es $(1, 0, 0)$; si en cambio $M = \{c_2, c_3\}$ la terna que le corresponde es $(0, 1, 1)$ mientras que a $M = \{c_1, c_3\}$ le corresponde $(1, 0, 1)$.

Por lo tanto, basta contar cuántas n-tuplas hay en A_n y esto es sencillo.
Para $n = 1$ es claro que A_n tiene 2 elementos:

$$(0); \; (1)$$

Para $n = 2$ tenemos 4:

$$(0,0); \; (0,1); \; (1,0); \; (1,1)$$

Para $n = 3$ tenemos 8:

$$(0,0,0); \; (0,1,0); \; (1,0,0); \; (1,1,0)$$

$$(0,0,1); \; (0,1,1); \; (1,0,1); \; (1,1,1)$$

y en general, si tenemos la familia A_{n-1}, por cada $(n-1)$-upla que ésta contiene podemos fabricar 2 de A_n, según agreguemos un 0 ó un 1 como última coordenada, y de este modo fabricamos todas las n-uplas de A_n una sola vez. O sea que:

$$\sharp A_n = 2(\sharp A_{n-1}) \quad (n \geq 2) ,$$

donde $\sharp A_n$ representa el número de elementos del conjunto A_n. Un sencillo argumento de inducción nos dice que

$$\sharp A_n = 2^n$$

y por lo tanto

$$\sharp \mathcal{P}(C) = 2^n.$$

2.3. Variaciones con Repetición.

Problema 10. *Lanzamos una moneda tres veces. ¿Cuántas sucesiones distintas de 'aguilas' y 'soles' podemos obtener?*

▶ Para cada lanzamiento hay dos resultados posibles. Para cada resultado posible del primer lanzamiento hay dos del segundo, lo cual da 2×2 combinaciones para los dos primeros. Para cada una de estas hay otros dos resultados posibles del tercero. En total hay $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$ sucesiones distintas. ▲

Problema 11. *¿Cuántos números de exactamente cuatro cifras se pueden formar con los dígitos impares?*

▶ Tenemos cinco dígitos impares: 1, 3, 5, 7 y 9. La cifra que corresponde a las unidades puede ser cualquiera de estas cinco. Lo mismo para las decenas, las centenas y las unidades de mil. Por lo tanto hay $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4 = 625$ números de cuatro cifras, todas impares. ▲

Problema 12. *¿Cuántas palabras de tres letras (con o sin sentido) pueden formarse con las letras de la palabra AZUL?*

► Para cada una de las letras de la palabra que queremos formar tenemos cuatro que podemos escoger. Por lo tanto hay $4^3 = 64$ palabras. ▲

Los tres problemas anteriores tienen características similares. Utilizando los m elementos de un conjunto C (los *cinco* dígitos impares, los *dos* resultados de lanzar una moneda, las *cuatro* letras de la palabra AZUL), queremos formar sucesiones de longitud n (*cuatro*, *tres* y *cuatro*, respectivamente) **permitiendo que los elementos se repitan** y queremos contar el número de maneras de hacer esto. El resultado es m^n. Veamos cómo se puede deducir ésto en general.

Consideremos un conjunto de m elementos con la notación $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$. Veamos el conjunto de n-uplas o vectores de dimensión n que podemos formar con los elementos del conjunto C, permitiendo que los elementos se repitan, es decir,

$$X_n = \{(c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_n}) : c_{i_j} \in C,\ j = 1, \dots, n\}$$

Por ejemplo, el conjunto A_n considerado en la sección 2.2 de las n-uplas de ceros y unos corresponde a tomar $C = \{0, 1\}$. Si en cambio $C = \{0, 1, 2\}$ y $n = 3$, entonces X_n consiste de las siguientes ternas:

$$\begin{array}{ccccccccc}
(0,0,0); & (0,0,1); & (0,0,2); & (0,1,0); & (0,1,1); & (0,1,2); & (0,2,0); & (0,2,1); & (0,2,2) \\
(1,0,0); & (1,0,1); & (1,0,2); & (1,1,0); & (1,1,1); & (1,1,2); & (1,2,0); & (1,2,1); & (1,2,2) \\
(2,0,0); & (2,0,1); & (2,0,2); & (2,1,0); & (2,1,1); & (2,1,2); & (2,2,0); & (2,2,1); & (2,2,2)
\end{array}$$

Hay que tener en cuenta que, al contrario de lo que sucede en el caso de los subconjuntos, el orden en el cual aparecen las componentes es determinante para las n-uplas. Así, el par (c_1, c_2) es distinto a (c_2, c_1).

Para calcular el número de elementos de X_n, llamado *variaciones (o arreglos) con repetición de m elementos tomados de n en n*, procedemos exactamente igual que en la sección anterior, cuando contamos el número de n-uplas de ceros y unos, sólo que ahora, en lugar de ceros y unos, la n-upla está formada a partir de los elementos de C, que son m. Repitiendo el razonamiento anterior resulta que

$$\sharp X_n = m^n.$$

Problema 13. *Si lanzamos un dado cuatro veces, ¿cuántos resultados posibles hay?*

► Para cada lanzamiento hay seis resultados posibles. Como lanzamos el dado cuatro veces el resultado es $6^4 = 1.296$.

Si usamos la notación anterior, $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $m = 6$ y $n = 4$. ▲

Problema 14. *En una cuadra hay cinco casas. Hay tres colores para escoger la pintura de cada una de ellas. ¿De cuantas maneras puede pintarse el conjunto de las cinco?*

► $3^5 = 243$. ▲

2.4. Variaciones sin Repetición.

Veamos ahora otro tipo de problemas.

Problema 15. *Entre los once jugadores de un equipo de fútbol hay que escoger un capitán y su suplente. ¿Cuántas maneras hay de hacer esto?*

▶ Cualquiera de los once jugadores puede ser seleccionado capitán. Hecho esto, cualquiera de los diez que quedan puede ser su suplente. Por lo tanto hay 11×10 maneras de hacerlo. ▲

La diferencia en este caso está en que la selección del capitán modifica el conjunto a partir del cual podemos seleccionar su suplente, ya que el capitán no puede ser su propio suplente. Por lo tanto, la selección del capitán y su suplente no son independientes, como ocurría en la sección anterior.

Problema 16. *Se colocan veinte tarjetas numeradas de 1 a 20 en una bolsa para rifar tres premios. ¿De cuántas maneras se pueden repartir los premios?*

▶ El primer premio puede ser cualquiera de los veinte números. Seleccionado éste, el segundo puede ser cualquiera de los 19 restantes, y el tercero cualquiera de los 18 que quedan luego de seleccionar primero y segundo. En total hay $20 \times 19 \times 18 = 6840$. ▲

De nuevo, a medida que vamos seleccionando cada número premiado, el conjunto a partir del cual podemos escoger el siguiente cambia.

Veamos cómo podemos calcular este número en general. Consideremos de nuevo un conjunto de m elementos con la notación $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$. Veamos ahora el conjunto de n-uplas o vectores de dimensión n que podemos formar con los elementos del conjunto C, impidiendo que los elementos se repitan, es decir, cuando consideramos el conjunto

$$Y_n = \{(c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_n}) : c_{i_j} \in C,\ j = 1, \dots, n,\ c_{i_j} \text{ distintos 2 a 2}\}.$$

El número de elementos de Y_n se llama las *variaciones (o arreglos) de m elementos tomados de n en n* y se denota V_n^m. Con frecuencia decimos arreglos sin repetición, o simplemente variaciones. Cuando no digamos nada se sobreentenderá que son sin repetición.

Por ejemplo, supongamos que $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ de modo que $m = 4$ y sea $n = 3$. Es fácil verificar que la lista siguiente contiene todos los elementos de Y_n sin que figuren repetidos:

$$\begin{array}{cccccc}
(c_1, c_2, c_3); & (c_1, c_2, c_4); & (c_1, c_3, c_2); & (c_1, c_3, c_4); & (c_1, c_4, c_2); & (c_1, c_4, c_3) \\
(c_2, c_1, c_3); & (c_2, c_1, c_4); & (c_2, c_3, c_1); & (c_2, c_3, c_4); & (c_2, c_4, c_1); & (c_2, c_4, c_3) \\
(c_3, c_1, c_2); & (c_3, c_1, c_4); & (c_3, c_2, c_1); & (c_3, c_2, c_4); & (c_3, c_4, c_1); & (c_3, c_4, c_2) \\
(c_4, c_1, c_2); & (c_4, c_1, c_3); & (c_4, c_2, c_1); & (c_4, c_2, c_3); & (c_4, c_3, c_1); & (c_4, c_3, c_2)
\end{array}$$

En consecuencia se observa que $V_3^4 = 24$.

Para obtener una fórmula general para V_n^m procedemos inductivamente en n. Antes que nada observamos que necesariamente se tiene que $n \leq m$, ya que si $n > m$, cualquier n-upla de elementos de C tendrá elementos repetidos. Comencemos con $n = 1$. Es claro que tenemos m 1-uplas que son:

$$(c_1);\ (c_2);\ \dots\ (c_m)$$

y por lo tanto

$$V_1^m = m.$$

Supongamos ahora que $n = 2$. Tenemos:

$$\begin{array}{cccc}
(c_1, c_2); & (c_1, c_3); & \dots & (c_1, c_m) \\
(c_2, c_1); & (c_2, c_3); & \dots & (c_2, c_m) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
(c_m, c_1); & (c_m, c_2); & \dots & (c_m, c_{m-1})
\end{array}$$

que son $m(m-1)$ pares que se obtienen agregando a cada uno de los m elementos de C colocados en primer término, uno de los $(m-1)$ elementos restantes (¡recordar que no hay repeticiones!). Por lo tanto

$$V_2^m = m(m-1).$$

Para tener una fórmula general para V_n^m, procedemos inductivamente en n, ya que el razonamiento anterior puede generalizarse sin dificultad como sigue:

Supongamos que tenemos todas las $(n-1)$-uplas (sin repetición). ¿Cómo fabricamos las n-uplas sin repetición? Tomamos una $(n-1)$-upla y le agregamos al final uno de los $(m-(n-1))$ elementos de C que no figuran en ella, de modo que, por cada $(n-1)$-upla podemos fabricar $(m-(n-1))$ n-uplas. De esta forma hemos fabricado todas las n-uplas de Y_n sin repetir ninguna. Por lo tanto

$$V_n^m = (m-n+1)V_{n-1}^m \quad (n \leq m). \tag{2.1}$$

Como ya vimos que $V_1^m = m$, deducimos de (1-1) que

$$V_n^m = m(m-1)\cdots(m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!} \tag{2.2}$$

donde $m! = m \times (m-1) \times \cdots \times 2 \times 1$ se conoce como m factorial. En la fórmula (2.2) utilizamos la convención $0! = 1$ (cuando $m = n$).

Problema 17. *En una carrera de fórmula 1 participan 26 corredores. Los cinco primeros ganan puntos según la posición que ocupen (9 puntos al primero, 6 al segundo, etc.) ¿De cuántas maneras pueden repartirse los puntos?*

► $V_5^{26} = 7,893,600.$ ▲

2.5. Permutaciones.

Un caso particular de variaciones son las *permutaciones*, que corresponden a la situación $m = n$. En este caso $V_m^m = m! = m(m-1)(m-2)\cdots 2\cdot 1$. Observamos que ahora las m-uplas contienen **todos** los elementos de C, sin repetición, dispuestos en todos los órdenes posibles.

Por ejemplo, si $m = n = 3$ las permutaciones son:

$$(c_1, c_2, c_3);\ (c_1, c_3, c_2);\ (c_2, c_1, c_3);\ (c_2, c_3, c_1);\ (c_3, c_1, c_2);\ (c_3, c_2, c_1).$$

Claramente $V_3^3 = 6$.

También se emplea con frecuencia para las permutaciones la notación

$$P_m = V_m^m = m!$$

Problema 18. *¿De cuántas maneras podemos colocar cuatro bolas de distintos colores en fila?*

► La primera puede ser cualquiera de las cuatro. La segunda, cualquiera de las tres restantes, etc. La respuesta es $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$. ▲

Problema 19. *¿Cuántas palabras, con o sin sentido, pueden obtenerse usando todas las letras de la palabra* PRENSA*?*

► Como la palabra no tiene letras repetidas, la respuesta es $6! = 720$. Más adelante nos encontraremos la situación de palabras con letras repetidas. ▲

2.6. Combinaciones.

Problema 20. *De un grupo de treinta estudiantes queremos escoger dos para participar en una competencia. ¿De cuántas maneras podemos hacerlo?*

▶ El primer estudiante del par puede ser cualquiera de los treinta y, una vez escogido éste, el segundo puede ser cualquiera de los veintinueve restantes. Pero de esta manera hemos contado cada pareja dos veces, cuando A es el primero y B el segundo, y cuando B es el primero y A el segundo. Por lo tanto tenemos que dividir este número entre dos. La respuesta es $\frac{30\times 29}{2} = 435$. ▲

Problema 21. *De un grupo de veinticinco libros queremos escoger tres para leer durante las vacaciones. ¿De cuántas maneras podemos hacer esto?*

▶ Hacemos un razonamiento similar al del problema anterior. Primero contamos cuantos tríos ordenados de libros podemos formar y luego dividimos entre el número de ordenamientos posibles de cada trío. El número de tríos ordenados son las variaciones de 25 elementos tomados de 3 en 3: $V_3^{25} = 25 \times 24 \times 23 = 13.800$. Cada trío lo podemos ordenar de $3! = 6$ maneras. Por lo tanto la respuesta es

$$\frac{V_5^{25}}{3!} = \frac{13.800}{6} = 2,300.$$

◀

Problema 22. *En un juego de dominó, ¿de cuántas maneras podemos escoger una mano?*

▶ Una mano consiste de siete piedras sin importar su orden. La primera puede ser cualquiera de las 28 que forman el juego. Escogida ésta, hay 27 para escoger la segunda, luego 26 para la tercera, y así sucesivamente hasta escoger las siete. En total: $V_7^{28} = 28 \times 27 \times 26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 = 5.967.561.600$. Pero cada mano ha sido contada varias veces, dependiendo del orden en el cual la escogimos. Por lo tanto tenemos que dividir por el número de maneras de ordenar una mano, que es $7! = 5040$, y la respuesta es

$$\frac{V_7^{28}}{7!} = \frac{5,967,561,600}{5040} = 1,184,040$$

◀

Veamos cómo podemos resolver este tipo de problemas en general. Consideramos nuevamente un conjunto $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ con m elementos. Llamamos *combinaciones de m elementos tomados de n en n* al número de subconjuntos de C que constan de n elementos. Se entiende que $0 \leq n \leq m$ y se denota dicho número por

$$\binom{m}{n} \quad \text{o también} \quad C_n^m.$$

Ya sabemos calcular el número de n-uplas ordenadas V_n^m que se pueden formar con los elementos de C. Es claro que cada subconjunto de C con n elementos da lugar a $n!$ n-uplas ordenadas - tantas como maneras tenemos de ordenar los n elementos del subconjunto - y por lo tanto

$$V_n^m = \binom{m}{n} \times n! \tag{2.3}$$

Reemplazando V_n^m por su valor (fórmula (2.2)), resulta

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!n!}. \tag{2.4}$$

Observamos que $\binom{m}{0} = 1$ para cualquier valor de m. Los números $\binom{m}{n}$ se conocen como *números combinatorios*. Estudiaremos algunas de sus propiedades más adelante. Veamos primero algunos problemas.

Problema 24. *En una práctica de Baloncesto el entrenador quiere escoger un equipo de cinco entre los treinta jugadores que están entrenando. ¿De cuántas maneras puede hacerlo?*

► $\binom{30}{5} = \frac{30!}{25!\,5!} = \frac{17{,}100{,}720}{120} = 142,506$ ▲

Problema 25. *Un estudiante tiene seis libros y otro tiene nueve. ¿De cuántas maneras pueden intercambiar tres libros?*

► El primer estudiante puede escoger tres libros de $\binom{6}{3}$ maneras mientras que el segundo puede hacerlo de $\binom{9}{3}$. Por lo tanto, el número de intercambios posibles es $\binom{6}{3}\binom{9}{3} = 1.120$. ▲

Problema 26. *Hay dos niñas y siete niños en un grupo de nadadores. Se quiere escoger un equipo de cuatro de modo que al menos uno de los nadadores sea niña. ¿De cuántas maneras se puede hacer esto?*

► Tenemos dos posibilidades: puede haber una o dos niñas en el equipo. En este último caso los dos varones pueden escogerse de $\binom{7}{2}$. Si hay sólo una niña, la podemos escoger de dos maneras, mientras que a los tres niños restantes los podemos escoger de $\binom{7}{3}$. En total tenemos $\binom{7}{2} + 2\binom{7}{3} = 91$ equipos posibles. ▲

Problema 27. *En el juego de KINO cada cartón tiene 15 números escogidos del 1 al 25. ¿Cuántos cartones hay?*

► Como no nos importa en orden en el cual escogemos los 15 números la respuesta es el número combinatorio $\binom{25}{15} = \frac{25!}{15!\,10!} = 3,268,760$.

Una observación importante es que seleccionar los 15 números que están en el cartón es equivalente a seleccionar los 10 que **no** están. Por lo tanto la respuesta también es el número combinatorio $\binom{25}{10} = \frac{25!}{10!\,15!} = 3,268,760$. Esta es una propiedad general que enunciamos a continuación. ▲

Problema 28. *Tenemos tres bolas indistinguibles y 20 cajas. ¿De cuántas maneras podemos colocar las bolas en las cajas de modo que no haya más de una bola en cada caja?*

► Podemos enumerar las cajas del 1 al 20 y ahora el problema se reduce a seleccionar subconjuntos de tres elementos del conjunto $\{1, 2, \ldots, 20\}$, que representan las cajas que van a estar ocupadas. Ya sabemos que esto lo podemos hacer de

$$\binom{20}{3} = 1,140$$

maneras distintas. ▲

El problema anterior muestra que si tenemos objetos de dos tipos y queremos colocar k objetos de tipo 1 y $n-k$ de tipo 2 en fila, tenemos $\binom{n}{k}$ maneras de hacerlo, pues podemos pensar que los lugares de la fila están numerados y que el problema consiste en contar el número de subconjuntos de k elementos del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$.

2.6.1. Propiedades.

Propiedad 1. $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$.
Demostración. A partir de la definición tenemos

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \binom{m}{m-n}.$$

Como ejercicio, dé una demostración sin calcular, utilizando solamente la definición de combinación.

Propiedad 2. (Relación de Pascal)

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n} \quad (1 \le n \le m-1). \tag{2.5}$$

Demostración. Tenemos un conjunto C de m elementos y queremos contar el número de subconjuntos de n elementos que tiene. Ya sabemos que este número es $\binom{m}{n}$ pero vamos a calcularlo de otra manera. Sea $c_1 \in C$ un elemento de C, contamos en primer lugar los subconjuntos de C de n elementos que **tienen** a c_1. Esto es equivalente a contar los subconjuntos de $n-1$ elementos del conjunto $C \setminus \{c_1\}$, que son $\binom{m-1}{n-1}$. En segundo lugar contamos los subconjuntos de C de n elementos que **no tienen** al elemento c_1. Como c_1 no puede estar en el subconjunto, tenemos que elegir a partir de los $m-1$ elementos restantes de C. Esto da $\binom{m-1}{n}$ subconjuntos. Aplicando ahora el Principio de Suma tenemos

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n}.$$

2.7. El Triángulo de Pascal.

La propiedad 2 sirve para construir un arreglo de números con propiedades útiles e interesantes, que se conoce como el triángulo de Pascal. Supongamos que para un cierto valor de m conocemos los valores de todos los números combinatorios de la forma $\binom{m}{n}$, $0 \le n \le m$, entonces la relación (2.5) nos permite calcular los valores de los números combinatorios $\binom{m+1}{n}$, $0 \le n \le m+1$:

$$\binom{m+1}{n} = \binom{m}{n-1} + \binom{m}{n}.$$

Por lo tanto, de manera recursiva podemos obtener todos los números combinatorios. Comenzamos con $\binom{0}{0} = 1$, al cual colocamos en el centro de la página. Los siguientes dos son $\binom{1}{0} = 1$ y $\binom{1}{1} = 1$, que colocamos debajo, a ambos lados del 1 que habíamos colocado inicialmente, de modo que éste quede en el centro del espacio que separa los dos números nuevos, como se ve en la figura 2.3.

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & & 1 \end{array}$$

Figura 2.3

Para $m = 2$ tenemos en primer lugar los dos números combinatorios de los extremos, que corresponden a $n = 0$ y $n = 2$, i.e. $\binom{2}{0} = 1$ y $\binom{2}{2} = 1$, que colocamos debajo de los anteriores, como se ve en la figura 2.4. Aún cuando es fácil calcular el número combinatorio $\binom{2}{1}$ directamente, vamos a hacerlo usando la fórmula (1.5): $\binom{2}{1} = \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 1 + 1 = 2$. Si colocamos este número en el centro de la tercera fila observamos que su valor es la suma de los dos números que se encuentran sobre él:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & \\ 1 & & 2 & & 1 \end{array}$$

Figura 2.4

Veamos como se construye la fila que corresponde a $m = 3$. Los extremos ambos valen 1: $\binom{3}{0} = \binom{3}{3} = 1$. El resto de los espacios los llenamos sumando en cada caso los dos valores que se encuentran por encima del espacio en cuestión: $\binom{3}{1} = 1 + 2 = 3$, $\binom{3}{2} = 2 + 1$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1
\end{array}$$

Figura 2.5

Si continuamos este proceso inductivamente obtenemos el triángulo que se indica en la figura 2.6, conocido como triángulo de Pascal.

j = 0	1
j = 1	1 1
j = 2	1 2 1
j = 3	1 3 3 1
j = 4	1 4 6 4 1
j = 5	1 5 10 10 5 1
j = 6	1 6 15 20 15 6 1
j = 7	1 7 21 35 35 21 7 1
j = 8	1 8 28 56 70 56 28 8 1
j = 9	1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
.	. . . .
.	. . . .

Figura 2.6 El Triángulo de Pascal.

La fila j tiene $j + 1$ números, que corresponden a los números combinatorios $\binom{j}{i}$, para $0 \le i \le j$, es decir que cada fila comienza por el número combinatorio $\binom{j}{0}$. Observamos, en consecuencia, que el número que aparece en el lugar $i + 1$ de la fila j, es el número combinatorio $\binom{j}{i}$, por ejemplo, para hallar $\binom{7}{4}$ buscamos el lugar 5 de la fila 7 obtenemos $\binom{7}{4} = 35$.

Otra manera de construir el triángulo es la siguiente. Cambiamos los números por puntos o nodos, como se indica en la figura 2.7.

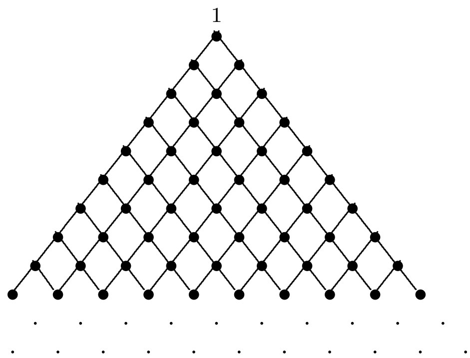

Figura 2.7

Escribimos un 1 sobre el vértice superior, y luego, sobre cada nodo, el número de maneras que hay para llegar a este punto a partir del vértice superior, moviéndonos únicamente hacia abajo. El resultado es el triángulo de Pascal.

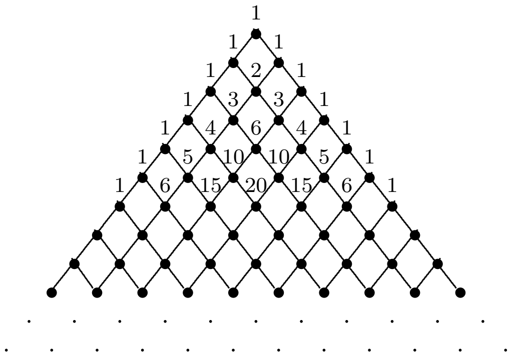

Figura 2.8

Veamos una propiedad interesante del triángulo de Pascal. Si evaluamos la suma de los números en cada fila obtenemos 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, etc. Parece natural la conclusión de que la suma de la n-ésima fila es 2^n. Esto es cierto y podemos probarlo por inducción. Sabemos que es cierto para las primeras filas. Para probar el paso inductivo observamos que cada número de la n-ésima fila es sumando para formar *dos* números de la siguiente fila: los que están por debajo de él, a ambos lados. Por lo tanto la suma de los números de la fila $n+1$ es dos veces la suma de los números de la fila anterior. Esto completa el paso inductivo.

Si escribimos esta relación explícitamente obtenemos la siguiente identidad:

$$\binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \cdots + \binom{m}{m-1} + \binom{m}{m} = 2^m. \tag{2.6}$$

En realidad, ya hemos visto una demostración combinatoria de esta identidad. El lado derecho representa el número de subconjuntos de un conjunto con m elementos. Por otro lado, el número combinatorio $\binom{m}{n}$ representa el número de subconjuntos de n elementos que se pueden formar a partir de un conjunto de m elementos. La identidad anterior dice que el número total de subconjuntos es igual a la suma de los subconjuntos de 0 elementos más el número de subconjuntos de 1 elemento más ... más el número de subconjuntos de m elementos.

2.8. El Binomio de Newton.

Queremos encontrar ahora una fórmula para la expresión $(a+b)^m$ para valores generales de m. Aún cuando este no es un problema de combinatoria, tiene una solución que está estrechamente ligada a los números combinatorios y al triángulo de Pascal.

Escribamos los valores de esta expresión para los primeros valores de m:

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1, \\
(a+b)^1 &= a+b, \\
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.
\end{aligned}$$

Observamos que los coeficientes de las expresiones que están del lado derecho corresponden a los valores del triángulo de Pascal. Esto sugiere la siguiente identidad:

$$\begin{aligned}
(a+b)^m &= \binom{m}{0} a^m + \binom{m}{1} a^{m-1}b + \binom{m}{2} a^{m-2}b^2 + \cdots + \binom{m}{m-1} ab^{m-1} + \binom{m}{m} b^m. \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^k b^{m-k}.
\end{aligned}$$

Haremos la demostración de esta fórmula por inducción completa en m. Observe que el segundo miembro contiene $(m+1)$ sumandos. Para $m=1$, queda

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0}a^1b^0 + \binom{1}{1}a^0b^1 = a+b,$$

que es obviamente correcto.
Supongamos entonces que la fórmula es correcta para m, e intentemos probar que también lo es para $(m+1)$. Tenemos

$$\begin{aligned}(a+b)^{m+1} &= (a+b)(a+b)^m = (a+b)\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^kb^{m-k}\\ &= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{k+1}b^{m-k} + \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^kb^{m-k+1}\\ &= a^{m+1} + \sum_{k=0}^{m-1}\binom{m}{k}a^{k+1}b^{m-k} + b^{m+1} + \sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}a^kb^{m-k+1}. \qquad (2.7)\end{aligned}$$

Haciendo un cambio en el índice de la suma $j=k+1$ obtenemos que el segundo sumando en la expresión anterior se puede escribir

$$\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m}{k}a^{k+1}b^{m-k} = \sum_{j=1}^{m}\binom{m}{j-1}a^jb^{m-j+1}.$$

Vamos a reemplazar esta expresión en (2.7), pero para mantener la uniformidad en la expresión y simplificarla más fácilmente, usaremos el índice k en lugar de j. Obtenemos

$$\begin{aligned}(2.7) &= a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k-1}a^kb^{m-k+1} + b^{m+1} + \sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}a^kb^{m-k+1}\\ &= a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m}\left[\binom{m}{k-1}+\binom{m}{k}\right]a^kb^{m-k+1} + b^{m+1}.\end{aligned}$$

Aplicando ahora la propiedad 2:

$$\binom{m}{k-1}+\binom{m}{k} = \binom{m+1}{k}$$

y reemplazando resulta

$$(a+b)^m = a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m}\binom{m+1}{k}a^kb^{m-k+1} + b^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1}a^kb^{m-k+1}$$

que muestra que la fórmula es correcta cuando el exponente es $m+1$. Por el principio de inducción sabemos entonces que la fórmula es válida para todo m.

Como caso particular de la fórmula del binomio de Newton podemos obtener de nuevo la identidad (1.6). Basta tomar $a=b=1$ para obtener

$$2^m = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}.$$

2.9. Coeficientes Multinomiales

Los coeficientes binomiales cuentan el número de maneras que tenemos de colocar en fila n objetos de dos tipos de modo que haya k objetos de tipo 1 y $n-k$ de tipo 2, donde $0 \leq k \leq n$. Sabemos que hay

$$\binom{n}{k}$$

maneras de hacerlo.

Supongamos ahora que tenemos m tipos distintos de objetos y queremos colocar en fila k_1 objetos de tipo 1, k_2 de tipo 2, …, k_m de tipo m, con $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$ y $0 \leq k_i \leq n$ para $i = 1, 2, \dots, m$. ¿De cuantas maneras podemos hacer esto?

Supongamos que podemos distinguir los n objetos, no solo los de distintos tipo sino también los del mismo tipo. Entonces tendríamos $n!$ arreglos posibles de los n objetos. Pero como en realidad los objetos de Tipo 1 son indistinguibles, cualquier permutación de estos objetos produce resultados que son indistinguibles. Como hay $k_1!$ arreglos de los objetos de tipo 1 en la fila, debemos dividir $n!$ por $k_1!$. Otro tanto ocurre con los objetos de tipo 2: Si los permutamos, obtenemos filas que son indistinguibles, de modo que también hay que dividir por $k_2!$. De manera similar debemos dividir por $k_3!$, $k_4!, \dots, k_m!$, de modo que el número de filas es

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}.$$

Usaremos la notación

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m}$$

para estos números, que llamaremos *coeficientes multinomiales.*

Por ejemplo, si tenemos las letras a, b, b, c, c ¿De cuántas maneras podemos ordenarlas? La respuesta es

$$\binom{5}{1, 2, 2} = 30.$$

Existe una relación entre los coeficentes multinomiales y el desarrollo de expresiones del tipo $(x_1 + \cdots + x_m)^n$ que es similar a la de los coeficientes binomiales y el binomio de Newton: El número $\binom{n}{k_1,\dots,k_m}$ es el coeficiente de $x_1^{k_1} \cdots x_m^{k_m}$ en el desarrollo de $(x_1 + \cdots + x_m)^n$.

Para ver esto consideremos cómo se forma un término como $x_1^{k_1} \cdots x_m^{k_m}$ en esta multiplicación. Si consideramos la expresión

$$(x_1 + \cdots + x_m)(x_1 + \cdots + x_m) \cdots (x_1 + \cdots + x_m) \tag{2.8}$$

los distintos términos se obtienen seleccionando una variable de cada factor en (2.8). Hay n factores y queremos seleccionar k_1 veces a x_1, a x_2, k_2 veces y así sucesivamente hasta x_n que lo queremos seleccionar k_n veces, y ya sabemos que esto lo podemos hacer de

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} \tag{2.9}$$

maneras distintas. Por lo tanto (2.9) es el coeficiente del término $x_1^{k_1} \cdots x_m^{k_m}$ en el desarrollo de $(x_1 + \cdots + x_m)^n$.

Como ejemplo podemos escribir el desarrollo del cubo de la suma de tres términos:

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2a + 3b^2c + 3c^2a + 3c^2b + 6abc.$$

2.10. Problemas Resueltos.

1. *¿Cuántas palabras (con o sin sentido) pueden formarse usando todas las letras de la palabra "REMAR"?*

► Esta palabra contiene dos veces la letra R y todas las demás son diferentes. Supongamos por un momento que estas dos letras son distinguibles: R_1 y R_2. En este caso hay $5! = 120$ palabras diferentes, pero en realidad dos palabras que puedan obtenerse intercambiando R_1 y R_2 son idénticas. Por lo tanto las 120 palabras se dividen en pares de palabras idénticas, de modo que la respuesta es $120/2 = 60$.

◄

2. *¿Cuántas palabras de (con o sin sentido) pueden formarse usando todas las letras de la palabra "SABANA"?*

► Esta palabra contiene tres veces la letra A. Supongamos de nuevo que estas letras son distinguibles: A_1 A_2 y A_3. En este caso hay $6! = 720$ palabras diferentes, pero en realidad dos palabras que puedan obtenerse intercambiando las letras A_i son idénticas y esto podemos hacerlo de $3! = 6$ maneras diferentes. Por lo tanto las 720 palabras se dividen en grupos de 6 palabras idénticas, de modo que la respuesta es $720/6 = 120$.

◄

3. *¿Cuántas palabras (con o sin sentido) pueden formarse usando todas las letras de la palabra "INTENCION"?*

► Esta palabra contiene tres veces la letra N, dos veces la letra I y las otras son distintas. Si pensamos de nuevo que estas letras son distinguibles, tenemos 9! palabras. Como en realidad las letras I son idénticas, el número de palabras se reduce a $9!/2!$, y ahora si recordamos que las N también son distinguibles nos quedan $9!/(2! \times 3!) = 30,240$ palabras.

◄

4. *¿De cuántas maneras pueden sentarse cinco personas en cinco sillas?*

► En este caso nos interesa el número de permutaciones de cinco elementos, ya que podemos pensar que las sillas están numeradas y el problema es equivalente a ordenar el conjunto de personas. Por lo tanto la respuesta es $5! = 120$.

◄

5. *¿De cuántas maneras pueden sentarse cinco personas en cinco sillas alrededor de una mesa circular, si consideramos que todas las rotaciones de una posición son equivalentes?*

► Obsérvese que se puede elegir arbitrariamente la silla para la primera persona (a menos de rotar simultáneamente a todo el mundo, hasta que esta primera persona quede sentada en esa silla). Es fácil ver, entonces, que el número de disposiciones posibles es el número de maneras de sentarse las 4 personas restantes en las 4 sillas que quedan, es decir $4! = 24$.

El mismo razonamiento dice que, si en lugar de 5 personas y 5 sillas, son n, el resultado es $(n-1)!$.

◄

6. *¿Cuántos números de seis cifras tienen al menos una cifra par?*

► Los números que tienen al menos una cifra par son aquellos que tienen una, dos, tres, ... seis cifras pares. Por lo tanto tendríamos que contar el número de elementos de cada uno de estos conjuntos y luego sumarlos. Resulta más sencillo en esta situación, contar cuantos números no satisfacen la condición (es decir, cuantos no tienen ninguna cifra par) y restar éste del total de los números de seis cifras. Hay $9 \times 10^5 = 900,000$ números de seis cifras (la primera cifra no puede ser 0, por eso la respuesta no es 10^6) de los cuales $5^6 = 15.625$ no tienen ninguna cifra par. Entonces hay $900,000 - 15,625 = 884,375$ números de seis cifras con al menos una de ellas par.

◀

7. *Supongamos que tenemos 3 cajas numeradas y 4 bolas indistinguibles. ¿De cuántas maneras podemos colocar las 4 bolas en las tres cajas?*

▶ Procedamos gráficamente, representando cada caja como la parte limitada por dos barras verticales. Por ejemplo, en la configuración de la figura tenemos 3 bolas en la primera caja, 0 bolas en la segunda y 1 bola en la tercera.

| ○ ○ ○ | | ○ |

1 2 3

Un instante de reflexión muestra que tenemos la situación siguiente: hay 4 bolas y 4 barras, que se disponen una a continuación de la otra en 8 lugares y cada configuración queda determinada por el lugar que asignamos a las dos barras centrales entre los 6 lugares que podemos elegir para ellas, teniendo en cuenta que las barras de los extremos están obligadas a quedar allí. Es decir, el problema se reduce a decidir de cuántas maneras se pueden colocar dos barras en seis espacios, y esto es $\binom{6}{2}$.

◀

8. *Generalizar el ejemplo anterior al caso en que tenemos b bolas y n cajas.*

▶ El resultado que se obtiene aplicando el mismo razonamiento es:

$$\binom{n+b-1}{n-1} = \binom{n+b-1}{b}$$

▲

9. *¿De cuántas maneras podemos escoger las cuatro manos en un juego de dominó?*

▶ Por el resultado del problema 22 en la sección 2.6 sabemos que hay 1,184,040 maneras de escoger una mano de siete piedras. Veamos de cuantas maneras podemos escoger las cuatro manos que forman el punto de inicio de una partida de dominó. Una vez escogida la primera mano, nos quedan 21 piedras para escoger la segunda, y por lo tanto hay $\binom{21}{7} = 116,280$. Para la tercera tenemos $\binom{14}{7} = 3,432$ y la última esta formada por las siete piedras que quedan. Por el principio de multiplicación la respuesta es el producto de estos números:

$$1,184,040 \times 116,280 \times 3,432 \times 1 = 472,518,347,558,400$$

▲

10. *Un cartón de 'BINGO' esta formado por cinco columnas de números, una para cada letra de la palabra BINGO. Cada columna tiene cinco números, excepto la central, correspondiente a la letra N, que tiene sólo cuatro ya que el lugar central no participa en el juego. Los cinco números de la primera columna se escogen entre los primeros 15 enteros:* $1, 2, \dots, 15$, *los de la segunda entre los enteros* $16, 17, \dots, 30$ *y así sucesivamente hasta la última columna, para la cual escogemos los cinco números entre* $61, 62, \dots 75$. *¿Cuántos cartones distintos de BINGO hay, suponiendo que el orden en el cual aparecen los números en cada columna no es importante?*

▶ Veamos en primer lugar, de cuantas maneras podemos escoger los cinco números de la primera columna, suponiendo que el orden de los números que aparecen en ella no importa. En este caso tenemos que escoger un subconjunto de 5 números a partir de un conjunto que tiene 15, de modo que la respuesta es el número combinatorio $\binom{15}{5} = 3,003$. Los resultados para las columnas correspondientes a las letras I, G y O son iguales, la única diferencia está en la columna central, correspondiente a la letra N. En este caso sólo escogemos cuatro números a partir de los 15 disponibles, de modo que la respuesta es $\binom{15}{4} = 1,365$

Ahora, por el principio de multiplicación, debemos multiplicar estos resultados para obtener la respuesta:

$$3,003^4 \times 1,365 = 111,007,923,832,370,565$$

▲

11. *En el problema anterior consideramos que el orden de los números en el cartón de BINGO no importaba. Esto es cierto si estamos jugando a cartón lleno, pero en muchos otros juegos, como las cuatro esquinas, la 'X', etc. sí importa el lugar en el cual aparece cada número. Si tomamos en cuenta el orden, ¿cuántos cartones distintos de BINGO hay?*

► Podemos aprovechar el cálculo que realizamos en el problema anterior si observamos que tenemos que multiplicar el resultado anterior por el número de maneras de ordenar los números que aparecen en cada cartón. Este ordenamiento debemos hacerlo respetando las restricciones de cada columna, es decir, en la primera sólo pueden aparecer números comprendidos entre 1 y 15, en la segunda entre 16 y 30, etc. Por lo tanto, para cada una de las columnas correspondientes a las letras B, I, G, y O tenemos cinco números y $5! = 120$ órdenes posibles. En la columna central hay sólo cuatro números y por lo tanto $4! = 24$ maneras de ordenarlos. En conclusión debemos multiplicar el resultado del problema anterior por $120^4 \times 24 = 4.976.640.000$:

$$111.007.923.832.370.565 \times 4.976.640.000 = 5,52446474061129 \times 10^{26}$$

▲

12. *Demostrar la identidad*

$$\binom{m}{n} = \sum_{k=n-1}^{m-1} \binom{k}{n-1} \tag{2.10}$$

e interpretar en base al triángulo de Pascal.

► Comenzamos a partir de la propiedad 2 de los números combinatorios:

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n} \tag{2.11}$$

que forma la base del triángulo de Pascal. Usamos esta propiedad para escribir el segundo sumando del lado derecho como

$$\binom{m-1}{n} = \binom{m-2}{n-1} + \binom{m-2}{n}.$$

Si sustituimos esta expresión en (2.11) y repetimos este procedimiento obtenemos

$$\begin{aligned}
\binom{m}{n} &= \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n} \\
&= \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-2}{n-1} + \binom{m-2}{n} \\
&= \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-2}{n-1} + \binom{m-3}{n-1} + \binom{m-3}{n} \\
&= \dots
\end{aligned}$$

y el resultado final es

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-2}{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

y teniendo en cuenta que $\binom{n}{n} = \binom{n-1}{n-1}$ obtenemos la expresión (2.10). Para ver qué interpretación tiene ésto en relación al triángulo de Pascal veamos un caso particular: $m = 7, n = 4$. La relación anterior nos dice que

$$35 = \binom{7}{4} = \binom{6}{3} + \binom{5}{3} + \binom{4}{3} + \binom{3}{3} = 20 + 10 + 4 + 1.$$

Si observamos la ubicación de estos números en el triángulo obtenemos

m = 0	1									
m = 1	1	1								
m = 2	1	2	1							
m = 3	1	3	3	1						
m = 4	1	4	6	4	1					
m = 5	1	5	10	10	5	1				
m = 6	1	6	15	20	15	6	1			
m = 7	1	7	21	35	35	21	7	1		
m = 8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
m = 9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Figura 2.9

13. *Dos cajas contienen $2n$ bolas cada una, numeradas de 1 hasta $2n$. Se selecciona un conjunto de n bolas de cada caja. Calcular el número de maneras de hacer ésto de modo que ambos conjuntos tengan, a lo sumo, una bola con el mismo número.*

▶ Utilicemos la siguiente notación:

$\{i_1, \dots, i_n\}$ es el conjunto de bolas extraídas de la primera caja.

$\{j_1, \dots, j_n\}$ es el conjunto de bolas extraídas de la segunda caja.

Es claro que los elementos de $\{i_1, \dots, i_n\}$ son 2 a 2 distintos, y lo mismo sucede para $\{j_1, \dots, j_n\}$. Observamos, aunque no forma parte de la pregunta, que el total de extracciones posibles de la primera caja es $\binom{2n}{n}$ y que, por cada una de éstas, podemos tener $\binom{2n}{n}$ extracciones de la segunda caja, de modo que el total de extracciones de parejas de conjuntos $\{i_1, \dots, i_n\}$, $\{j_1, \dots, j_n\}$ es

$$\binom{2n}{n}^2.$$

Veamos ahora la respuesta a la pregunta formulada. El número de maneras de que ambos conjuntos contengan, a lo sumo, una bola con el mismo número, es la suma del número de maneras de que no contengan ningún número en común más el número de maneras de que contengan en común exactamente un número.

¿Cuántas extracciones podemos efectuar, de tal modo que $\{i_1, \dots, i_n\}$ y $\{j_1, \dots, j_n\}$ no contengan ningún número en común?

Tenemos libertad en la selección de $\{i_1, \dots, i_n\}$, que puede ser hecha de $\binom{2n}{n}$ maneras. Por cada elección de $\{i_1, \dots, i_n\}$ en cambio, hay una sola elección de $\{j_1, \dots, j_n\}$ que produce el efecto deseado de que ambos conjuntos no contengan ningún número en común, que es la elección de los n números del conjunto total $\{1, 2, \dots, 2n\}$ que no figuran en $\{i_1, \dots, i_n\}$. En consecuencia tenemos

$$\binom{2n}{n} \tag{2.12}$$

maneras de elegir los subconjuntos $\{i_1, \dots, i_n\}$ (de la primera caja) y $\{j_1, \dots, j_n\}$ (de la segunda) de modo que no tengan ningún elemento en común

¿Cuántas extracciones podemos efectuar, de tal modo que $\{i_1, \dots, i_n\}$ y $\{j_1, \dots, j_n\}$ contengan exactamente un número en común?

Nuevamente, hay $\binom{2n}{n}$ maneras de elegir la extracción $\{i_1, \dots, i_n\}$ de la primera caja. Hecha ésta, debemos contar cuántas formas tenemos de extraer $\{j_1, \dots, j_n\}$ de modo que en este último conjunto figure uno y solo un elemento de $\{i_1, \dots, i_n\}$. Para ello procedemos así: elegimos el elemento de $\{i_1, \dots, i_n\}$ que debe figurar, para lo cual tenemos n alternativas. Luego elegimos los $(n-1)$ elementos restantes de $\{j_1, \dots, j_n\}$ entre los n elementos que quedan en la segunda caja cuando excluimos los de $\{i_1, \dots, i_n\}$, y esto lo podemos hacer de

$$\binom{n}{n-1} = n$$

maneras.

Resumiendo, por cada extracción de la primera caja tenemos n^2 maneras de hacer una extracción de la segunda que tenga exactamente un elemento en común con la hecha en la primera. Recordando que hay $\binom{2n}{n}$ maneras de extraer de la primera, resulta que la respuesta a nuestra segunda interrogante es que hay

$$\binom{2n}{n} n^2 \tag{2.13}$$

maneras de extraer $\{i_1, \dots, i_n\}$ y $\{j_1, \dots, j_n\}$ de modo que tengan un elemento común. Sumando (1.5) y (1.6) tenemos el resultado final

$$\binom{2n}{n}(1 + n^2).$$

▲

2.11. Aplicaciones a Probabilidad

Podemos ahora aplicar las técnicas de conteo que hemos desarrollado en este capítulo para calcular probabilidad en el caso 'clásico', es decir, cuando tenemos un espacio muestral finito y todos los elementos del espacio tienen igual probabilidad de ocurrir. Veamos un par de ejemplos importantes.

2.11.1. Muestreo con Reposición. La Distribución Binomial.

Retomemos el ejemplo del capítulo anterior sobre el muestreo con reposición, pero en lugar de considerar muestras de tres elementos, consideramos muestras de m elementos. Tenemos una población de N objetos de los cuales n son defectuosos. Igual que antes podemos calcular las probabilidades correspondientes, siempre admitiendo que son igualmente probables de ser extraídos todos los conjuntos ordenados de m elementos buenos y defectuosos.

Sea $p_{k,m}(0 \leq k \leq m)$ la probabilidad de extraer exactamente k defectuosos entre los integrantes de la muestra. Sea $N_{k,m}$ el número de maneras posibles en las cuales se pueden extraer k defectuosos en una muestra de m. Entonces

$$N_{k,m} = \binom{m}{k} n^k (N-n)^{m-k}$$

porque podemos elegir de $\binom{m}{k}$ formas los k lugares que ocupan los defectuosos en la muestra, en cada uno de ellos poner cualquiera de los n defectuosos que hay en la población, y colocar además cualquiera de los $N-n$ no defectuosos en cada uno de los $m-k$ lugares restantes.

Dado que el número total de muestras posibles de m elementos (es decir, de eventos elementales) es N^m, resulta que

$$p_{k,m} = \frac{N_{k,m}}{N^m} = \binom{m}{k}\left(\frac{n}{N}\right)^k\left(1-\frac{n}{N}\right)^{m-k},$$

o sea

$$p_{k,m} = \binom{m}{k}p^k(1-p)^{m-k}$$

puesto que todas las muestras posibles se han supuesto igualmente probables. Esta función de probabilidad se conoce como la *Distribución Binomial* con parámetros m y p. El nombre de la distribución viene del Binomio de Newton, que estudiamos en la sección 2.8. Podemos usar la fórmula del binomio para demostrar que, efectivamente, la expresión anterior define una probabilidad. Tenemos que verificar que, si sumamos $p_{k,m}$ sobre todos los valores posibles de k, el resultado es 1.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m} p_{k,m} &= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}p^k(1-p)^{m-k}\\ &= (p+(1-p))^m = 1.\end{aligned}$$

Ensayos de Bernoulli y la Distribución Binomial. Si realizamos una serie de experimentos con dos resultados posibles, que podemos llamar éxito y fracaso, o 1 y 0, y éxito o 1 tiene probabilidad p de ocurrir, tenemos una situación similar a la que acabamos de analizar. Este tipo de experimento se como un *experimento de Bernoulli* con probabilidad p de éxito. Si realizamos m experimentos de este tipo, la probabilidad de obtener k éxitos está dada por la distribución binomial $p_{k,m}$ que acabamos de definir.

2.11.2. Muestreo sin Reposición. La Distribución Hipergeométrica.

De una población de N artículos entre los cuales hay n defectuosos, se extraen sucesivamente r sin reposición y se cuenta el número de los defectuosos en la muestra. El espacio muestral contiene todos los subconjuntos de r elementos tomados entre los N dados, es decir, $\binom{N}{r}$ puntos muestrales.

Consideremos el evento: "en la muestra hay exactamente s defectuosos", donde $s \le n,\ s \le r$. Queremos calcular el número de puntos de este evento, para lo cual observamos que los defectuosos se pueden elegir de $\binom{n}{s}$ formas diferentes, y los no defectuosos de $\binom{N-n}{r-s}$ formas diferentes. Dado que cualquier elección de s defectuosos se puede combinar con cualquier elección de $r-s$ no defectuosos, tenemos en total

$$\binom{n}{s}\binom{N-n}{r-s}$$

muestras posibles en las que hay exactamente s defectuosos.

La probabilidad de obtener exactamente s defectuosos en una muestra de tamaño r tomada en una población de N objetos con n defectuosos es

$$p(s) = \frac{\binom{n}{s}\binom{N-n}{r-s}}{\binom{N}{r}} \qquad s \le r,\ s \le n,$$

admitiendo que todas las extracciones posibles son igualmente probables.

Para obtener esta fórmula observemos que hay $\binom{N}{r}$ muestras de tamaño r sin reposición, hay $\binom{n}{s}$ maneras de escoger s defectuosos entre los n que hay en la población y por cada una de ellas hay $\binom{N-n}{r-s}$ maneras de escoger los $r-s$ objetos en buen estado. Esta función de probabilidad se conoce como la *Distribución Hipergeométrica*.

Aplicaremos este modelo a la estimación de N, situación que se presenta frecuentemente en la práctica. Supongamos, por ejemplo, que se desea estimar el total N de peces en un lago. Podemos proceder del siguiente modo: extraemos una muestra de tamaño n y marcamos los peces antes de reintegrarlos al lago. Posteriormente se extrae una muestra, que puede ser del mismo tamaño n, y contamos el número de peces marcados. Se supone que no ha variado el número total de peces y que todos tienen la misma probabilidad de salir en la segunda muestra. Veamos cómo procedemos para estimar N suponiendo que en la segunda muestra se obtuvieron s peces marcados.

Usando el método de máxima verosimilitud, introducido en el capítulo anterior, consideramos la función

$$L(N) = \frac{\binom{n}{s}\binom{N-n}{n-s}}{\binom{N}{n}} \qquad s \leq n,$$

que representa la probabilidad de obtener s peces marcados en una muestra de tamaño n, si el tamaño de la población es N y hay n peces marcados, y determinamos N tal que $L(N)$ sea máximo. Para ello, como se trata de una función discreta, no podemos usar los métodos del Cálculo y consideramos una comparación entre valores sucesivos de la función L para determinar el valor que la maximiza.

Consideramos entonces

$$\frac{L(N)}{L(N-1)} = \frac{\binom{N-1}{n}\binom{N-n}{n-s}}{\binom{N}{n}\binom{N-n-1}{n-s}} = \frac{(N-n)^2}{N(N-2n+s)}.$$

Si el cociente es mayor que 1, resulta $L(N) > L(N-1)$. Para que esto ocurra es necesario que

$$(N-n)^2 = N^2 - 2nN + n^2 > N(N-2n+s) = N^2 - 2nN + sN$$

simplificando esta expresión obtenemos $n^2 > sN$. En consecuencia, para $N < n^2/s$ se tiene $L(N) > L(N-1)$ y la desigualdad cambia de sentido si $N > n^2/s$. Por lo tanto, el valor de N que maximiza a $L(N)$ es el mayor entero que no supera a n^2/s. En particular, si $n = 1,000$ y $s = 100$ resulta

$$\hat{N} = \frac{10^6}{10^2} = 10,000.$$

2.12. Problemas Resueltos

1. De los 38 números de una ruleta (del 1 al 36, y los números 0 y 00), 18 son rojos. ¿Cuál es la probabilidad de que en cinco juegos un número rojo gane exactamente dos veces?

► Este es un caso de muestreo con reposición: Tenemos 38 números para escoger y en cada juego puede ganar cualquiera de ellos. Si realizamos cinco juegos hay 38^5 resultados posibles. Para contar de cuantas maneras puede salir un número rojo exactamente dos veces observamos que hay $\binom{5}{2}$ maneras de escoger los juegos en los cuales ganan números rojos. En cada uno de ellos puede ganar cualquiera de los 18 números rojos que tiene la ruleta, lo que nos da un total de 18^2 posibilidades, y en cada uno de los juegos en los cuales no gana un número rojo podemos colocar cualquiera de los 20 números restantes, para un total de 20^3. Tenemos entonces que hay $\binom{5}{2}18^2 20^3$ maneras en las cuales pueden resultar exactamente dos números rojos ganadores en cinco juegos. La probabilidad que buscamos es, por lo tanto

$$\binom{5}{2}\frac{18^2 20^3}{38^5} = \binom{5}{2}\left(\frac{18}{38}\right)^2\left(\frac{20}{38}\right)^3.$$

Hemos podido utilizar los resultados de la sección 2.11.1 para resolver este problema de manera más sencilla. Vimos allí que la probabilidad de obtener exactamente k defectuosos en una muestra de tamaño m realizada con reposición si la proporción de defectuosos en la población es p sigue una distribución binomial de parámetros m y p:

$$\binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}.$$

Este es exactamente el resultado que acabamos de obtener con $m = 5,\ k = 2$ y $p = 18/38$.

◀

2. Se lanza un dado seis veces. ¿Cuál es la probabilidad de que los resultados sean todos distintos?

► Hay 6^6 resultados posibles. De ellos 6! corresponden a tener en cada lanzamiento un resultado posible. Por lo tanto la probabilidad que buscamos es

$$\frac{6!}{6^6} = \frac{5}{324} = 0.0154$$

◀

3. Si colocamos al azar n fichas en n cajas, ¿Cuál es la probabilidad de que cada caja tenga exactamente una ficha?

► Numeramos las cajas de 1 a n. Distribuir las fichas en las n cajas es equivalente a asignarle a cada ficha el número de la caja en la cual la colocamos. A cada ficha podemos asignarle cualquiera de los n números, y como hay n fichas, tenemos n^n distribuciones posibles. ¿Cuántas de ellas corresponden a tener exactamente una ficha en cada caja? Para que esto sea cierto, al hacer una lista de los números que hemos asignado a las fichas deben estar todos los números de 1 a n sin que haya ninguno repetido. Esto se puede hacer de $n!$ maneras. Por lo tanto la probabilidad que buscamos es

$$\frac{n!}{n^n}.$$

◀

4. Si colocamos al azar n fichas en m cajas, ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna caja tenga más de una ficha?

► En primer lugar observamos que si hay más fichas que cajas, es imposible hacer una distribución sin que haya al menos una caja con más de una ficha. En este caso la probabilidad buscada es 0. Supongamos, entonces que $m \geq n$. Si adoptamos el mismo procedimiento que en el problema anterior, asignándole a cada ficha el número de la caja que le toca, vemos que hay m^n distribuciones posibles. Veamos cuantas hay sin que ninguna caja tenga más de una ficha. Esto equivale a escoger una muestra de n números sin reposición de los m que corresponden a los números de las cajas. Esto lo podemos hacer de V_n^m maneras, de modo que la probabilidad que buscamos es 0 si $m < n$ y

$$\frac{V_n^m}{m^n} = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{m^n} \quad \text{si } m \geq n.$$

◀

5. Si colocamos al azar n fichas en m cajas, ¿Cuál es la probabilidad de que la primera caja tenga exactamente k fichas?

► Para que esto ocurra, a exactamente k de las fichas tenemos que asignarle el número 1, y un número distinto de 1 al resto de las fichas. Las fichas a las cuales vamos a asignarle el número 1 las podemos escoger de $\binom{n}{k}$ maneras. A cada una de las $n-k$ fichas restantes podemos asignarle cualquiera de los $m-1$ números que no son 1, y esto lo podemos hacer de $(m-1)^{n-k}$ maneras. La probabilidad que buscamos es

$$\frac{\binom{n}{k}(m-1)^{n-k}}{m^n}.$$

◀

6. Tenemos 100 cartas numeradas del 1 al 100. Se mezclan las cartas y luego se van volteando una a una. ¿Cuál es la probabilidad de que la carta con el número j aparezca en el j-ésimo lugar al ser volteada?

▶ En este problema podemos pensar que el resultado de voltear las 100 cartas es un arreglo de 100 números entre 1 y 100, sin repetir ninguno:

$$(a_1, a_2, \dots, a_{100}), \quad 1 \leq a_i \leq 100, \quad i = 1, \dots, 100.$$

¿Cuántos arreglos podemos formar? Hay uno por cada permutación de los números de 1 a 100, por lo tanto hay 100! resultados posibles. ¿Cuántos de ellos tienen una j en el lugar j? Si fijamos el número que ocupa este lugar, quedan 99 números para distribuir en los 99 lugares restantes. Hay 99! maneras de hacer esto. Por lo tanto la probabilidad buscada es

$$\frac{99!}{100!} = \frac{1}{100}.$$

En general, si en lugar de 100 números hay n, la probabilidad de que en el j-ésimo lugar aparezca la carta con el número j es $1/n$.

◀

7. En el problema anterior, ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna carta aparezca en su lugar?

▶ Llamemos A_j el evento que ocurre si la $j$ésima carta aparece en su lugar. Vimos en el ejercicio anterior que la probabilidad de este evento es $1/100$. Queremos calcular la siguiente probabilidad:

$$P(A_1^c \cap \cdots \cap A_{100}^c) = 1 - P(A_1 \cup \cdots \cup A_{100})$$

y para obtener esta última probabilidad podemos usar el principio de inclusión-exclusión que vimos en la sección 1.4 del primer capítulo:

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_{100}) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{101} P(A_1 \cap \cdots \cap A_{100}). \tag{2.14}$$

El primer término de esta ecuación es 1 porque hay 100 sumandos y cada unos de ellos vale $1/100$. Para el segundo término tenemos que si dos números específicos quedan fijos simultáneamente, el resto se puede permutar de $(100-2)!$ maneras, de modo que

$$P(A_i \cap A - j) = \frac{(100-2)!}{100!} = \frac{1}{100 \cdot 99}.$$

Nos falta contar el número de términos en la segunda suma, que es el número de maneras de seleccionar dos números enteros del 1 al 100, y esto lo podemos hacer de $\binom{100}{2}$ maneras distintas. Por lo tanto el segundo término de la ecuación (2.14) es

$$-\binom{100}{2} \frac{1}{100 \cdot 99} = -\frac{100 \cdot 99}{2!} \frac{1}{100 \cdot 99} = -\frac{1}{2!}.$$

Para el tercer término tenemos que para cualesquiera i, j, k fijos,

$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{(100-3)!}{100!} = \frac{1}{100 \cdot 99 \cdot 98}$$

y hay $\binom{100}{3}$ términos en la suma, de modo que el tercer término de (2.14) es

$$\binom{100}{3} \frac{1}{100 \cdot 99 \cdot 98} = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{3!} \frac{1}{100 \cdot 99 \cdot 98} = -\frac{1}{3!}.$$

Continuando este razonamiento y sustituyendo los términos obtenidos en (2.14) obtenemos

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_{100}) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots - \frac{1}{100!} \approx 0.367879$$

y la probabilidad de que ningún número quede en su lugar es

$$1 - P(A_1 \cup \cdots \cup A_{100}) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - \cdots + \frac{1}{100!} \approx 0.632121$$

Si en lugar de tener 100 cartas tenemos n, la probabilidad de que haya al menos un número en su lugar es

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!},$$

y si llamamos p_n a la probabilidad de que ningún número quede en su lugar:

$$p_n = 1 - P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}. \tag{2.15}$$

Recordemos el desarrollo de la función exponencial en serie de potencias:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots .$$

Si ponemos $x = -1$ obtenemos

$$e^{-1} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} + \cdots \approx 0.3678794 \tag{2.16}$$

y observamos que p_n converge a e^{-1}. Es interesante observar que los términos de la serie en (2.16) alternan de signo y como los denominadores son factoriales, que crecen muy rápidamente, las serie converge también muy rapidamente. Con $n = 5$, $p_n = 0.3666667$ y con $n = 10$, $p_n = 0.3678795$.

◀

8. Lanzamos un dado repetidamente hasta obtener el primer seis. ¿Cuál es la probabilidad de obtenerlo en el k-ésimo lanzamiento?

▶ Llamemos X al lugar en el cual ocurre el primer seis. Queremos calcular la probabilidad del evento $\{X = k\}$ y para ello observamos que hay 6^k resultados posibles de lanzar un dado k veces. Para que el primer seis ocurra en el lanzamiento k es necesario que en los primeros $k-1$ lanzamientos nunca ocurra un seis, y que en el k-ésimo ocurra un seis. Lo segundo sólo puede suceder de una manera, pero para lo primero tenemos 5^{k-1} posibilidades, ya que para cada uno de los $k-1$ lanzamientos hay 5 resultados posibles. Por lo tanto

$$P(X = k) = \frac{5^{k-1}}{6^k} = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}.$$

Este resultado puede generalizarse de la siguiente manera: supongamos que realizamos una sucesión de experimentos cada uno de los cuales tiene dos resultados posibles: *éxito* y *fracaso* ó '1 ' y '0 ' con probabilidades respectivas p y $q = 1 - p$. Llamemos X al lugar en el cual ocurre el primer éxito, ¿cuál es la probabilidad de que el primer éxito ocurra en el lugar k? La situación es similar a la del lanzamiento del dado si llamamos *éxito* a obtener un seis en el lanzamiento y ponemos $p = 1/6$. El resultado general, cuya demostración veremos más adelante, es

$$P(X = k) = q^{k-1}p.$$

Esta función de probabilidad se conoce como la *Distribución Geométrica* de parámetro p. Observamos que X puede tomar como valor cualquier entero positivo.

◀

2.13. Resumen.

Cuando escogemos elementos que pertenecen a un conjunto decimos que realizamos *un muestreo* y podemos hacerlo de acuerdo a diversos criterios: Con reposición de los elementos al conjunto antes de hacer la siguiente selección, o sin reposición. Podemos también tener en cuenta el orden en el cual hacemos la selección o no. Esto nos da cuatro posibilidades:

- **Muestreo con orden y con reposición:** Variaciones con repetición. Si queremos seleccionar k elementos de un conjunto de tamaño n, con reposición y en orden, lo podemos hacer de n^k maneras.

- **Muestreo con orden y sin reposición:** Variaciones. Si queremos seleccionar k elementos de un conjunto de tamaño n, sin reposición y en orden, es necesario que $k \leq n$ y lo podemos hacer de $V_k^n = n(n-1)\cdots(n-k+1)$ maneras. El caso particular $k = n$ se reduce a contar los posibles órdenes de los n elementos del conjunto, se conoce como las permutaciones de n y $V_n^n = n!$.

- **Muestreo sin orden y sin reposición:** Combinaciones. Si queremos seleccionar k elementos de un conjunto de tamaño n, sin reposición y sin orden, es necesario que $k \leq n$ y lo podemos hacer de $\binom{n}{k} = \frac{n!}{n!(n-k)!}$ maneras.

- **Muestreo sin orden y con reposición:** Este caso no tiene un nombre particular y es el más complicado de los cuatro, pero ya lo hemos encontrado anteriormente, en los problemas 7 y 8 de la sección 2.10. Si queremos seleccionar k elementos de un conjunto de tamaño n, con reposición y sin orden, ésto lo podemos hacer de $\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$ maneras. Veamos esto: podemos pensar que a cada elemento del conjunto le asignamos una caja, de modo que en total tenemos n cajas. Tomamos ahora k bolas y las repartimos en las cajas, sin importar si hay cajas vacías o cajas con más de una bola. El número de bolas que hay en una caja es representa el número de veces que hemos seleccionado ese elemento en la muestra. Como vimos en el problema 8 de la sección 2.10, ésto efectivamente se puede hacer de $\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$ maneras.

2.14. Comentarios y Algo de Historia.

1.- Blaise Pascal nació en Clermont, Francia, el 19 de junio de 1623. Publicó a los diecisiete años el brillante "*Ensayo Sobre las Cónicas*", se interesó posteriormente en el trabajo experimental de Torricelli y cultivó un considerable interés por la física experimental. Desarrolló una máquina calculadora, similar a las cajas registradoras de hace algunos años. Escribió, posteriormente, el "*Tratado del Triángulo Aritmético*" sobre los números combinatorios. Este triángulo, conocido ahora como el Triángulo de Pascal y que estudiamos en la sección 2.7, era conocido por los matemáticos europeos desde hacía al menos un siglo. Aparece, entre otros, en el trabajo de Stifel y Tartaglia. El crédito de Pascal no está en su descubrimiento sino en haber realizado un estudio sistemático y elegante de sus propiedades. Menos conocido, pero más importante, es el hecho de que Pascal introdujo la inducción matemática y aplicó esta técnica para demostrar resultados sobre los coeficientes binomiales.

El triángulo de Pascal era conocido por el poeta y matemático árabe Omar Khayam unos 550 años antes de Pascal y también aparece en el *Precioso Espejo de los Cuatro Elementos* escrito hacia 1.300 por el matemático chino Chu Shi Kei.

2.- Isaac Newton nació el 25 de diciembre de 1642 en Woolsthorpe Manor, Inglaterra. En 1661 ingresó en Trinity College de la Universidad de Cambridge, donde estudió con Isaac Barrow. En un manuscrito de 1665 presentó la fórmula para el desarrollo binomial con cualquier potencia y describió las ideas fundamentales de su método de *fluentes* y *fluxiones*, un método equivalente al Cálculo de Leibniz.

Su trabajo más importante fue "*Principios Matemáticos de la Filosofía Natural* ", publicado en Londres en 1.687. En este importante tratado se presenta la Ley de la Gravitación Universal, y las bases de la Mecánica Clásica, cuyos principios dominaron la física de los siglos XVIII y XIX.

Newton no trabajó en el área de probabilidad. La única contribución conocida aparece en lista de ejercicios (25) y fue un problema que le propuso Samuel Pepys y que respondió correctamente, aunque luego Pepys no se mostró muy dispuesto a aceptar su respuesta.

3.- El problema 7 de la sección 2.12 es un problema clásico en la historia de las probabilidades y fue propuesto inicialmente por Pierre Rémond de Montmort (1678-1719) en su tratado sobre probabilidades *Essay d'analyse sur les jeux de hazard* publicado en 1708. El juego original consistía en trece bolas numeradas que se sacaban en sucesión de una caja, y por esa razón se llamaba *treize* o trece. También era conocido como *rencontres* o coincidencias.

2.15. Ejercicios

1. ¿Cuántas diagonales tiene un polígono convexo de n lados?

2. a. ¿De cuántas maneras podemos escoger un comité de tres personas en un grupo de 20?

   b. ¿De cuántas maneras podemos escoger un presidente, un secretario y un tesorero?

3. Hay N niñas y N niños en una fiesta.

   a. ¿Cuántas parejas de baile de sexos distintos pueden formarse?

   b. ¿De cuántas maneras se pueden colocar en una fila de modo que los sexos se alternen?

4. Un examen tiene 12 preguntas que pueden ser respondidas *cierto* o $falso$. Si un estudiante decide responder *cierto* a seis de ellas, ¿de cuántas maneras puede hacerlo?

5. Con las letras de la palabra LIBRO, ¿Cuántas palabras de cinco letras o menos (con o sin sentido) pueden formarse? ¿Cuántas de ellas no tienen letras repetidas?

6. Calcule cuantas palabras con o sin sentido pueden formrse con las letras de las siguientes palabras.

   CUAUTITLAN, CUERAMARO, TLALNEPLANTLA TLACOQUEMECATL.

7. Se disponen 5 bolas blancas y 5 negras en 3 cajas numeradas. ¿Cuántas maneras hay de hacerlo?

8. ¿Cuántos números se pueden formar usando todos los dígitos 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4?

9. En una mesa de un restaurant seis personas ordenan arrachera, tres piden enchiladas, dos piden pollo y uno pide pasta.

   a. ¿De cuántas maneras pueden servirse los 12 platillos de modo que todos reciban lo que ordenaron?

   b. ¿De cuántas maneras pueden servirse de modo que nadie reciba lo que ordenó?

10. Una mano de POKER consiste de cinco cartas tomadas de un juego de barajas. ¿De cuántas maneras se puede obtener

    a. una escalera (cinco cartas en orden, sin importar la pinta; el As puede terminar la escalera pero no comenzarla)?

    b. un trío?

    c. un par?

    d. dos pares?

    e. un par y un trio (full house)?

    f. Halle la probabilidad de los eventos anteriores.

11. ¿Cuál es la probabilidad de que cuatro personas seleccionadas al azar hayan nacido en diferentes dias de la semana?

12. Se disponen en fila 2 bolas blancas y 6 bolas negras de modo que no haya dos bolas blancas consecutivas (la figura indica una manera posible). ¿Cuántas maneras hay de hacerlo?

●●○●○●●●

13. ¿De cuántas maneras pueden sentarse cinco hombres y cinco mujeres en una mesa redonda de modo que no haya dos hombres sentados uno al lado del otro?

14. ¿De cuántas maneras pueden sentarse cinco hombres y ocho mujeres en una mesa redonda si los hombres se sientan todos juntos?

15. Seleccionamos cuatro niños al azar y sin reposición de una familia que tiene exactamentes dos varones. La probabilidad de no escoger ningún varón es la mitad de seleccionar ambos ¿Cuántos niños en total hay en la familia?

16. ¿Cuántos números de cinco cifras tienen todas sus cifras de igual paridad (todas pares o todas impares)?

17. En una mesa rectángular los anfitriones se sientan en los extremos. ¿De cuántas maneras se pueden sentar

    a. seis invitados, tres a cada lado?

    b. cuatro mujeres y cuatro hombres, sentados cuatro a cada lado de modo que no haya dos personas del mismo sexo juntas?

    c. ocho invitados, cuatro a cada lado de la mesa, de modo que dos invitados específicos se sienten juntos?

18. ¿De cuántas maneras podemos escoger cuatro cartas de distintas pintas y distintos valores a partir de un juego de 52 cartas?

19. ¿Cuál es la probabilidad de que una mano de bridge (13 cartas) tenga los cuatro aces?

20. ¿Cuántas biyecciones hay de A a B, si ambos conjuntos tienen n elementos?

21. Determine los enteros n tales que $n! > 2^n$.

22. Un restaurante ofrece un menú con las siguientes posibilidades: cuatro sopas para escoger una, dos platillos principales, para escoger uno, dos acompañantes a escoger entre tres tipos de papas, tres tipos de vegetales y una ensalada, Cuatro postres para escoger uno y una bebida de tres.

    a. ¿Cuántas comidas diferentes se pueden ordenar si sólo hay un tipo de papa en cada orden, suponiendo que no se omite ningún tiempo?

    b. ¿Cuántas comidas diferentes se pueden ordenar si sólo hay un tipo de papa en cada orden, y se omite un tiempo distinto del plato principal?

23. Clara dice que es capaz de distinguir Pepsi Cola de Coca Cola por el sabor 75 % de las veces. Pedro piensa que Clara sólo está adivinando. Para determinar quién tiene la razón Clara debe probar 10 vasos en cada uno de los cuales hay alguna de las dos gaseosas, que ha sido seleccionada al azar lanzando una moneda. Clara gana si acierta 7 o más veces. Halle la probabilidad de que Clara gane si en realidad lo que dice es cierto. Halle la probabilidad de que Clara gane si en realidad está adivinando.

24. En un grupo de 12 personas hay dos de apellido Pérez. Si no importa el orden, ¿de cuántas maneras se pueden escoger siete personas a) sin restricciones? b) si se deben incluir los dos Pérez? c) sin incluir ningún Pérez? d) si sólo un Pérez se incluye? e) si al menos un Pérez se incluye? f) si a lo sumo un Pérez se incluye?

25. a. Halle la probabilidad de obtener al menos un seis al lanzar 6 dados. b. Halle la probabilidad de obtener al menos dos seises al lanzar 12 dados. c. Halle la probabilidad de obtener al menos tres seises al lanzar 18 dados. Compare los tres resultados.

26. a. Se colocan 3 bolas numeradas en 3 cajas numeradas. Hallar el número de maneras de hacerlo de modo que: (i) Al menos una caja quede vacía. (ii) Exactamente una caja quede vacía.

    b. Repetir el cálculo hecho en a. cuando hay n bolas y n cajas.

27. Las claves o Números de Identificación Personal (NIP) para las tarjetas bancarias tienen usualmente 4 cifras. Si una computadora asigna estos números al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que las cuatro cifras sean diferentes? ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente dos dígitos repetidos?

28. Los dados para jugar poker consisten de 5 dados con los símbolos $\{9, 10, J, Q, K, A\}$. Al lanzar estos cinco dados ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 'full house' (un trío y una pareja? ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos pares?

29. Una caja contiene ocho bolas, dos rojas, dos azules, dos blancas y dos negras. Las bolas se separan al azar en dos grupos de cuatro bolas cada uno ¿Cuál es la probabilidad de que cada conjunto tenga una bola de cada color?

30. Una caja contiene 100 bolas numeradas del 1 al 100. Se seleccionan al azar dos bolas sin reposición ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números sea par?

31. Un amigo te invita jugar Aguila o Sol lanzando su moneda, pero tu piensas que la moneda no está balanceada. Le propones jugar de la siguiente manera: lanzas la moneda dos veces, si el resultado es AS tu ganas, si es SA tu amigo gana y si es AA o SS ninguno gana y se vuelve a lanzar la moneda hasta lograr dos resultados distintos. Supón que la probabilidad de que la moneda salga A es p. Halla la probabilidad de AS, SA, AA, SS con dos lanzamientos de la moneda. Usando esto demuestra que la probabilidad de ganar en el nuevo esquema es $1/2$.

32. Un medicamento tiene una efectividad desconocida p. Para estimar p se aplica el medicamento a n pacientes y se encuentra que resultó efectivo en m de ellos. El *pricipio de máxima verosimilitud* dice que debemos estimar p seleccionando el valor que maximiza la probabilidad de que ocurra lo que ocurrió en el experimento. Suponga que el experimento puede considerarse una serie de ensayos de Bernoulli con probabilidad de éxito p y demuestre que el estimador de máxima verosimilitud para p es m/n.

33. Veintidos caballos de madera distintos se van a colocar en un carrusel en dos círculos concéntricos. ¿De cuántas maneras se puede hacer esto si cada círculo debe tener 11 caballos y cada uno de ellos debe estar al lado de otro caballo?

34. Demuestre que a partir de un conjunto de n elementos se pueden formar 2^{n-1} subconjuntos con un número par de elementos.

35. Sea $\mathcal{A}$ la colección de subconjuntos de $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ que tienen tamaño par (por convención $\emptyset$ tiene tamaño par), y sea $\mathcal{B}$ la colección de los subconjuntos de tamaño impar. Establezca una biyección de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$, lo cual demuestra que ambos tienen la misma cardinalidad.

36. Demuestre que $\binom{n}{k}$ y $\binom{2n}{2k}$ tienen la misma paridad, es decir, ambos son pares o ambos son impares.

37. Demuestre que hay infinitas filas del triángulo de Pascal que consisten unicamente de números impares.

38. Sea a un número del Triángulo de Pascal. Demuestre que la suma de los números del triángulo que se encuentran dentro del paralelogramo limitado por los lados del triángulo y las diagonales que pasan por a (ver figura 2.10) es igual a $a - 1$

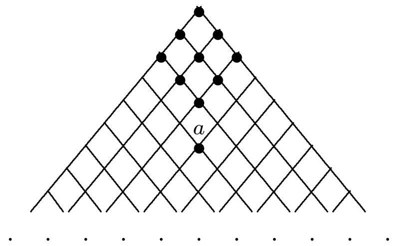

Figura 2.10

39. Demuestre las siguientes identidades

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0, \qquad \binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}.$$

40. Sea x un elemento de un conjunto A de tamaño $2n$. Cuente los subconjuntos de A de n elementos que incluyen a x y los que lo excluyen. Use esto para demostrar que $\binom{2n}{n}=2\binom{2n-1}{n-1}$

41. Sea $m=\binom{n}{2}$, demuestre que $\binom{m}{2}=3\binom{n+1}{4}$.

42. Demuestre las siguientes identidades

$$a.\ \sum_{k=1}^{n}2^{k-1}=2^n-1, \qquad b.\ \sum_{k=1}^{n-1}k=\binom{n}{2}, \qquad c.\ \sum_{k=1}^{n}k(n-k)=\binom{n}{3}.$$

43. **Fórmula de Van der Monde.** Demuestre que para m,n enteros y $r\le m\wedge n$,

$$\sum_k\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}=\binom{m+n}{r}$$

44. Demuestre que $\binom{n}{k}=\sum_{r=1}^{n}\binom{r-1}{k-1}$

45. Considere todas las poligonales $(n,S_n), n\ge 0$ que parten del origen – es decir, que $S_0=0$ – y que, en cada paso, saltan una unidad hacia arriba o hacia abajo. Dicho de otra manera, $S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$, donde cada X_i vale 1 ó -1.

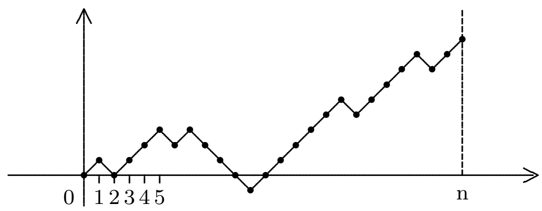

Figura 2.11

a. ¿Cuántas poligonales podemos construir en el intervalo de tiempo $[0,n]$?

b. ¿Cuántas poligonales satisfacen $S_n=0$?

c. Usamos la notación $N_{n,h}=\sharp\{$ poligonales tales que $S_n=h\}$. Sea k un entero positivo y ℓ un entero no-negativo. Probar que

$$N_{n,k+\ell}=\sharp\{\text{ poligonales tales que } S_n=k-\ell,\ \text{y para algún } m\le n \text{ se tiene } S_m=k\}$$

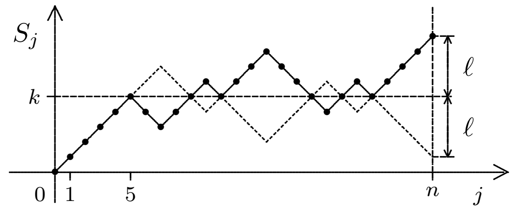

Figura 2.12

d. Sea k un entero positivo, probar que

$$\sharp\{\text{poligonales tales que } S_n = 0, \max_{1\le m\le n} S_n \ge k\} = N_{n,2k}.$$

46. Agrupando un conjunto de n^2 puntos de dos maneras distintas, de una prueba combinatoria de $n^2 = 2\binom{n}{2} + n$.

47. Demuestre que $\binom{k}{j}\binom{n}{k} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}$ contando los elementos de un conjunto de dos maneras distintas.

48. Consideremos un tablero cuadriculado como el de la figura 2.13, con las columnas numeradas y las filas indicadas por letras. Supongamos que un punto se mueve sobre los nodos de modo que en cada movimiento se puede dirigir hacia adelante, a la izquierda o a la derecha, pero nunca se devuelve. El punto comienza en la intersección $J12$ viniendo de la calle I. ¿Cuántas rutas distintas hay para

    a. llegar a la intersección $L8$ después de 6 movimientos?

    b. regresar a $J12$ después de cuatro movimientos?

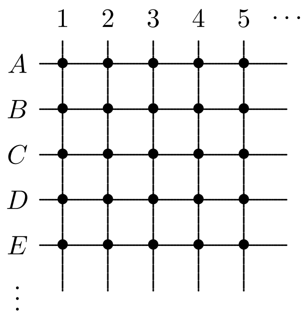

Figura 2.13

49. En el tablero del problema anterior queremos ir de $B2$ a $J10$ en el menor número posible de movimientos ¿Cuántas rutas posibles hay?

50. ¿Cuántos rectángulos (de cualquier tamaño se pueden formar usando los segmentos de una retícula con m rectas horizontales y n verticales. En la figura 2.14, $m = 4, n = 6$.

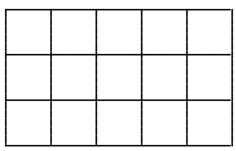

Figura 2.14