Capítulo 8

Integrales Impropias

8.1. Introducción

La integral de Riemann tal como la hemos estudiado, está definida únicamente para funciones acotadas y definidas sobre intervalos cerrados y acotados. En este capítulo estudiaremos como extender esta definición a funciones que no son acotadas en la vecindad de un punto, o a regiones de integración de la forma $[a, +\infty)$, $(-\infty, a]$ o a todo $\mathbb{R}$.

8.2. Integrales de Funciones No Acotadas

Definición 8.1 Si $f \in R[a, b-\epsilon]$ para todo $\epsilon > 0$ y $\int_a^{b-\epsilon} f\,dx \to \ell$ cuando $\epsilon \to 0^+$ decimos que f tiene una *integral impropia de Riemann* sobre $[a, b]$ y su valor es ℓ. Escribimos $\int_a^b f\,dx$ en lugar de ℓ.

De manera similar, si $f \in R[a+\epsilon, b]$ para todo $\epsilon > 0$ y $\int_{a+\epsilon}^b f\,dx \to \ell$ cuando $\epsilon \to 0^+$ decimos que f tiene una *integral impropia de Riemann* sobre $[a, b]$ y escribimos

$$\int_a^b f\,dx = \ell.$$

Ejemplos 8.1

1. $f : [0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = (1-x)^{-1/2}$ entonces

$$\int_0^{1-\epsilon} (1-x)^{-1/2}\,dx = -2(1-x)^{1/2}\Big|_0^{1-\epsilon} = 2(1-\epsilon^{1/2}) \to 2 \ (\epsilon \to 0^+).$$

La función tiene una integral impropia sobre $[0, 1]$ y

$$\int_0^1 (1-x)^{-1/2}\,dx = 2.$$

2. $f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = 1/\sqrt{x}$

$$\int_{\epsilon}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2\sqrt{x}\Big|_{\epsilon}^{1} = 2(1-\sqrt{\epsilon}) \to 2$$

y f tiene una integral impropia en $[0,1]$, $\int_0^1 f\, dx = 2$. ◀

En general, si f está definida sobre $[a,b]$ y existe un número finito de puntos $c_1, \cdots, c_k$ tales que $a < c_1 < c_2 < \cdots < c_k < b$ y f tiene una integral impropia de Riemann sobre cada intervalo $[a, c_1], [c_1, c_2], \cdots, [c_{k-1}, c_k], [c_k, b]$, entonces f tiene una integral impropia de Riemann sobre $[a,b]$ y denotaremos la suma

$$\int_a^{c_1} f\, dx + \int_{c_1}^{c_2} f\, dx + \cdots + \int_{c_k}^{b} f\, dx$$

por

$$\int_a^b f\, dx$$

En cualquiera de los casos anteriores escribimos $f \in \mathcal{IR}[a,b]$.

Ejercicios 8.1

Estudie la convergencia de las siguientes integrales impropias

1) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}\, dx$	2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$
3) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}\, dx$	4) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x}}\, dx$
5) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$	6) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\log x}{\sqrt{x}}\, dx$
7) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\log x}{1-x}\, dx$	8) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\cosh x}\, dx$
9) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}\log x}$	10) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\log x}$

8.3. Propiedades de las Integrales Impropias

(a) Si f y g están en $\mathcal{IR}[a,b]$ entonces también están $f+g$ y λf donde $\lambda \in \mathbb{R}$. Además:

$$\int_a^b (f+g)\, dx = \int_a^b f\, dx + \int_a^b g\, dx \text{ y } \int_a^b \lambda f\, dx = \lambda \int_a^b f\, dx.$$

(b) Si $f \in \mathcal{IR}[a,b]$ y $[c,d] \subset [a,b]$ entonces $f \in \mathcal{IR}[c,d]$. Además, si $a < c < b$ entonces

$$\int_a^b f\, dx = \int_a^c f\, dx + \int_c^b f\, dx$$

(c) Si f y g están en $\mathcal{IR}[a,b]$ y $f(x) \geq g(x)$ para $x \in [a,b]$ entonces

$$\int_a^b f\,dx \geq \int_a^b g\,dx$$

(d) Si $f \in \mathcal{IR}[a,b]$ entonces $\int_a^c f\,dx$ es una función continua de c para $a \leq c \leq b$.

(e) Si F es derivable para $a \leq x \leq b$ y $F'(x) = f(x) \in \mathcal{IR}[a,b]$ entonces

$$\int_a^b f\,dx = F(b) - F(a).$$

(f) Si f y g están en $\mathcal{IR}[a,b]$ y F y G están definidas por

$$F(x) = \int_a^x f\,dt \qquad G(x) = \int_a^x g\,dt$$

entonces

$$F(b)G(b) = \int_a^b fG\,dt \quad + \int_a^b Fg\,dt.$$

(g) Si $f \in \mathcal{IR}[a.b]$, $g(y)$ es creciente para $y \in [c,d]$ con $g(c) = a$, $g(d) = b$ y si $g' \in \mathcal{R}[c,d]$ entonces $(f \circ g)g' \in \mathcal{IR}[c,d]$ y

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f\,dx = \int_c^d (f \circ g)g'\,dy.$$

Demostración. Ejercicio.

8.4. Integrales Sobre Dominios Infinitos

Definición 8.2 Si $f \in R[a,t]$ para todo $t > a$ y $\int_a^t f\,dx$ converge a un límite ℓ cuando $t \to \infty$ decimos que $f \in \mathcal{R}[a,\infty)$ y escribimos $\int_a^\infty f\,dx$ en lugar de ℓ. Decimos en este caso que la integral $\int_a^\infty f\,dx$ *converge*. Si $f \in \mathcal{R}[a,t]$ para todo $t > a$ y $\int_a^t f\,dx$ no converge a un límite finito cuando $\alpha \to \infty$ decimos que la integral $\int_a^\infty f\,dx$ *diverge*.

De manera similar definimos la clase de funciones $\mathcal{R}(-\infty,b]$. Si $f \in \mathcal{R}[a,\infty)$ y $f \in \mathcal{R}(-\infty,a]$ decimos que $f \in \mathcal{R}[-\infty,\infty)$ y definimos la integral de f sobre $(-\infty,\infty)$ como

$$\int_\infty^\infty f\,dx = \int_{-\infty}^a f\,dx + \int_a^\infty f\,dx.$$

8.4.1. Propiedades de las funciones $\mathcal{R}[a,\infty)$.

(a) Si $f, g \in R[a,\infty)$ entonces $f+g$ y $\lambda f \in R[a,\infty)$ donde $\lambda \in \mathbb{R}$ y

$$\int_a^\infty (f+g)\,dx = \int_a^\infty f\,dx + \int_a^\infty g\,dx, \qquad \int_a^\infty kf\,dx = k\int_a^\infty f\,dx.$$

(b) Si $f \in R[a,\infty)$ entonces $\int_x^\infty f\,dt$ es una función continua de x para $x > a$. Si f es continua en $x > a$ entonces

$$\frac{d}{dx}\int_x^\infty f\,dt = -f(x).$$

(c) Si $F' = f \in R[a,\infty)$ entonces existe ℓ tal que $F(x) \to \ell$ cuando $x \to \infty$ y

$$\int_a^\infty f\,dx = \ell - F(a).$$

(d) Si $f, g \in R[a,\infty)$, $F(x) = \int_a^x f\,dt$, $G(x) = \int_a^x g\,dt$ entonces si fG ó Fg está en $R[a,\infty)$ tenemos

$$\int_a^\infty fG\,dx + \int_a^\infty Fg\,dx = \int_a^\infty f\,dx \int_a^\infty g\,dx.$$

Esta es la fórmula de integración por partes y se obtiene haciendo $b \to \infty$ en la fórmula de integración por partes sobre $[a,b]$.

(e) Supongamos que g es estrictamente creciente en (c,d), $g' \in R(c,d]$, $g(c) = a$ y $g(y) \to \infty$ cuando $y \to d^-$. Entonces si $f \in R[a,\infty)$ se tiene $(f\circ g)g' \in R(c,d]$ y

$$\int_a^\infty f\,dx = \int_c^d (f\circ g)g'\,dy.$$

Como consecuencia de (e) observamos que podemos reducir el estudio de integrales impropias de Riemann a la consideración de la convergencia de integrales sobre dominos infinitos. Si por ejemplo, $f \in R[a, b-\epsilon]$ para todo $\epsilon, 0 < \epsilon < b-a$, entonces haciendo $y = 1/(b-x)$ obtenemos

$$\int_a^{b-\epsilon} f\,dx = \int_{1/(b-a)}^{1/\epsilon} f(b-\frac{1}{y})\frac{1}{y^2}\,dy = \int_{1/(b-a)}^{1/\epsilon} g(y)\,dy$$

donde $g(y) = \frac{1}{y^2}f(b-\frac{1}{y})$. En este caso $f \in \mathcal{IR}(a,b]$ si y solo si $g \in \mathcal{IR}[\frac{1}{b-a},\infty)$.

Ejercicios 8.2

1. *Determine para cuáles valores de s son convergentes las siguientes integrales:*

1) $\displaystyle\int_1^{\infty} x^{-s}\,dx$	2) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{1+x}\,dx$
3) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{xs}\,dx$	4) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-sx}\,dx$
5) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx}\,dx$	6) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s\|x\|}\,dx$

8.5. El Principio General de Convergencia para Integrales Impropias

Lema 8.1 *La función f converge a un límite finito cuando $x \to \infty$ si y sólo si dado $\epsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{R}$ tal que*

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon \quad \text{si} \quad x > k, y > k. \tag{8.1}$$

Demostración. Si $f(x) \to \ell$ cuando $x \to \infty$ entonces para todo $\epsilon > 0$ existe k tal que $|f(x) - \ell| < \epsilon/2$ para $x > k$. Si $x, y > k$ entonces

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - \ell| + |f(y) - \ell| < \epsilon.$$

Recíprocamente, tomemos una sucesión (x_n) con $x_n \to \infty$ entonces por el criterio de Cauchy $(f(x_n))$ converge si (8.1) se cumple. Como esto es cierto para toda sucesión (x_n) con $x_n \to \infty$ concluimos que $f(x) \to \ell$. ∎

Teorema 8.1 $f \in R[a, \infty)$ *sí y sólo sí:*

(a) $f \in R[a, b]$ *para todo* $b > a$ *y*

(b) Para todo $\epsilon > 0$ existe k tal que si $x > k, y > k$ entonces

$$\left| \int_x^y f\,dt \right| < \epsilon.$$

Demostración. Esto es consecuencia del lema anterior aplicado a la función

$$F(x) = \int_a^x f\,dt.$$

∎

8.5.1. Convergencia Absoluta

Definición 8.3 Decimos que la integral $\int_a^\infty f\,dt$ es *absolutamente convergente* sí y sólo sí $|f| \in \mathcal{R}[a,\infty]$.

Si $|f| \in \mathcal{R}[a,\infty)$ entonces $f \in \mathcal{R}[a,\infty)$ ya que podemos aplicar el lema anterior a $\int_a^\infty |f|\,dx$ y obtenemos que dado $\epsilon > 0$ existe k tal que si $x > k, z > k$ entonces

$$\int_x^z |f|\,dt < \epsilon$$

pero

$$\left|\int_x^z f\,dt\right| \leq \int_x^z |f|\,dt < \epsilon$$

y aplicando de nuevo el lema obtenemos $f \in \mathcal{R}[a,\infty)$.

8.5.2. Integrales de Funciones Positivas.

Si $f \geq 0$ en $[a,\infty)$ y $f \in \mathcal{R}[a,b]$ para todo $b > a$ entonces la condición necesaria y suficiente para que $f \in \mathcal{R}[a,\infty)$ es que $\int_a^x f\,dt$ sea acotada superiormente para $x > a$. Esto es consecuencia de que $\int_a^x f\,dt$ es creciente como función de x. A partir de esta propiedad obtenemos el siguiente criterio para convergencia de integrales impropias.

Proposición 8.1 (Criterio de Comparación) *Si* $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $g \in \mathcal{R}[a,\infty)$, $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *para todo* $b > a$ *entonces* $f \in \mathcal{R}[a,\infty)$.

Si $0 \leq g(x) \leq f(x)$ *y* $g \in \mathcal{R}[a,b]$ *para todo* $b > a$ *pero* $g \notin \mathcal{R}[a,\infty)$ *entonces* $f \notin \mathcal{R}[a,\infty)$.

Definición 8.4 Si $f \in \mathcal{R}[a,\infty)$ pero $|f| \notin \mathcal{R}[a,\infty)$ decimos que la integral $\int_a^\infty f\,dx$ es *condicionalmente convergente.*

Ejercicios 8.3

1. *Si* f *y* g *están en* $\mathcal{R}[a,b]$ *para cada* $b \geq a$, *donde* $f(x) \geq 0$ *y* $g(x) > 0$ *para todo* $x \geq a$, *y si* $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c$, *con* $c \neq 0$, *entonces las integrales* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *y* $\int_a^\infty g(x)\,dx$ *convergen o divergen conjuntamente.*
2. *En la situación del ejercicio anterior demuestre lo siguiente:*

i) Si $c = 0$ *entonces si* $\int_a^\infty g(x)\,dx$ *converge, también* $\int_a^\infty f(x)\,dx$.

ii) Si $c = \infty$ *entonces si* $\int_a^\infty g(x)\,dx$ *diverge, también* $\int_a^\infty f(x)\,dx$.

8.6. Integrales y Series.

Bajo ciertas condiciones hay una estrecha relación entre el comportamiento de la integral $\int_1^\infty f\,dt$ y el de la serie $\sum f(n)$.

Teorema 8.2 *Si f está definida para $x \geq 0$, es decreciente y positiva entonces*

$$\int_1^N f\,dx - \sum_{n=1}^N f(n)$$

tiende a un límite finito cuando $N \to \infty$.

Demostración Llamemos

$$k_N = \int_1^N f\,dx - \sum_{n=1}^N f(n).$$

Como f es decreciente

$$k_{N+1} - k_N = \int_N^{N+1} f\,dx - f(N+1) \geq 0$$

de modo que la sucesión (k_N) es creciente. Llamemos ahora

$$\ell_N = \int_1^N f\,dx - \sum_{n=1}^{N-1} f(n).$$

Un argumento similar muestra que la sucesión (ℓ_N) es decreciente. Además

$$\ell_N - k_N = f(N) \geq 0.$$

Por lo tanto $k_N \leq \ell_N \leq \ell_1$, de modo que k_N está acotada superiormente. En consecuencia k_N converge a un límite finito. ■

Corolario 8.1 (Prueba de la Integral) *Si f está definida para $x > 0$, es decreciente y positiva, entonces $\sum f(n)$ converge si y solo si $\int_1^\infty f\,dx$ converge.*

Demostración. Si $\int_1^\infty f\,dx$ converge entonces $\int_1^N f\,dx$ tiende a un límite finito cuando $N \to \infty$ y por lo tanto

$$\sum_{n=1}^N f(n) = \int_1^N f\,dx - k_N$$

también converge a un límite finito. Por otro lado, si $\sum_{n=1}^N f(n)$ converge a un límite finito cuando $N \to \infty$ entonces $f(n) \to 0$ cuando $n \to \infty$ y

$$\int_1^N f\,dx = \sum_{n=1}^N f(n) + k_N$$

también tiende a un límite finito cuando $N \to \infty$. Si $N < x < N+1$ entonces

$$\left|\int_1^x f\ dt - \int_1^N f\ dt\right| = \left|\int_N^x f\ dt\right| \leq f(N)$$

que tiende a cero cuando $N \to \infty$ y en este caso $\int_1^x$ converge a un límite finito cuando $x \to \infty$. ■

Ejemplos 8.2

1. Tomemos $f(x) = 1/x$ en el teorema anterior, entonces

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$$

tiende a un límite finito cuando $n \to \infty$. Este límite se conoce como la constante de Euler, se denota por γ y es un número en $(0,1)$.

2. Tomemos ahora

$$f(x) = \left(x \log x \cdots \log_{r-1} x\ (\log_r(x))^\alpha\right)^{-1}$$

donde

$$\log_s(x) = \log(\log_{s-1}(x)), \qquad \log_2(x) = \log(\log(x))$$

Sea a suficientemente grande de modo que f esté definida si $x > a$, entonces

$$\begin{aligned}\int_a^x f\ dt &= \frac{1}{1-\alpha}(\log_r t)\Big|_a^x \\ &= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}\left[(\log_r x)^{1-\alpha} - (\log_r(a))^{1-\alpha}\right] & \text{si } \alpha \neq 1. \\ \log_{r+1}(x) - \log_{r+1}(a) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}\end{aligned}$$

por lo tanto la serie $\sum f(n)$ converge si $\alpha > 1$ y diverge si $\alpha \leq 1$. Estas series son útiles a los efectos de la prueba de comparación.

Ejercicios 8.4

1.

Ejercicios Complementarios

1. *Diga si las siguientes proposiciones son ciertas o falsas. En cada caso de una demostración o un contraejemplo.*

   a.- Si la sucesión $\int_1^n f(x)\,dx$ *converge, la integral* $\int_1^\infty f(x)\,dx$ *converge.*

   b.- Si f *es decreciente y* $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_1^n f(x)\,dx$ *existe entonces la integral* $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$ *existe.*

c.- Si $f(x) \to 0$ *cuando* $x \to \infty$ *y* $\lim\limits_{n\to\infty} \int_1^n f(x)\,dx = A$*, entonces* $\int_1^\infty f(x)\,dx$ *converge y su valor es* A*.*

d.- Si $f(x) \geq 0$ *y* $\lim\limits_{n\to\infty} \int_1^n f(x)\,dx = A$*, entonces* $\int_1^\infty f(x)\,dx$ *converge y su valor es* A*.*

e.- Si $\int_1^\infty f(x)\,dx$ *converge entonces* $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$