Capítulo 7

Integral de Riemann

7.1. Definición de la Integral de Riemann

En este capítulo supondremos, a menos que se indique lo contrario, que $a < b$ y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función acotada.

Definición 7.1 Una *partición* del intervalo $[a,b]$ es un subconjunto finito $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a,b]$ tal que

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

es decir, es un subconjunto finito de $[a,b]$ que contiene los puntos a y b. Escribimos $\Delta x_i = x_i - x_{i-i},\ i = 1, \cdots, n$. La familia de las particiones de $[a,b]$ la denotaremos por $\mathcal{P}[a,b]$ y llamaremos P a un miembro genérico de esta familia.

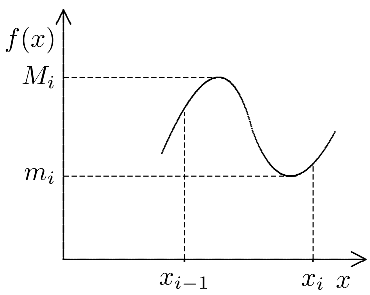

Figura 7.1

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada y $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{P}[a,b]$, definimos (ver figura 7.1)

$$\begin{aligned} M_i(f) = M_i &= \sup\{f(x) : x_{i-1} \le x \le x_i\}, \\ m_i(f) = m_i &= inf\{f(x) : x_{i-1} \le x \le x_i\}. \end{aligned} \tag{7.1}$$

para $i = 1, \ldots, n$ y además las sumas superior $S(P, f)$ e inferior $I(P, f)$ correspondientes a la partición P por

$$S(P,f) = \sum_{j=1}^{n} M_i \Delta x_i, \tag{7.2}$$

$$I(P,f) = \sum_{j=1}^{n} m_i \Delta x_i. \tag{7.3}$$

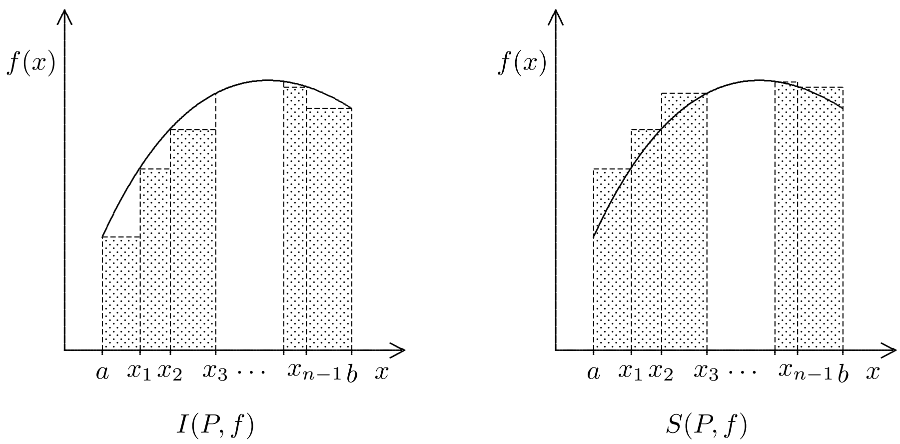

Figura 7.2

Es evidente que $I(P, f) \leq S(P, f)$ para cualquier partición P. Como f es acotada existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq K$ para todo $x \in [a, b]$ y por lo tanto para $i = 1, \ldots, n$ se tiene $|M_i| \leq K$ y $|m_i| \leq K$, de modo que para cualquier $P \in \mathcal{P}[a, b]$

$$|S(P,f)| \leq K(b-a) \qquad |I(P,f)| \leq K(b-a) \tag{7.4}$$

Esto muestra que los conjuntos $\{S(P, f) : P \in \mathcal{P}[a, b]\}$ y $\{I(P, f) : P \in \mathcal{P}[a, b]\}$ son acotados y nos permite definir la *integral superior de Riemann* de f sobre $[a, b]$ por

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \inf\{S(P,f) : P \in \mathcal{P}[a,b]\}, \tag{7.5}$$

y la *integral inferior de Riemann* de f sobre $[a, b]$ por

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \sup\{S(P,f) : P \in \mathcal{P}[a,b]\}. \tag{7.6}$$

Si $\overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \underline{\int_a^b} f(x)\, dx$ decimos que f es *integrable* (según Riemann) sobre el intervalo $[a, b]$, escribimos $f \in \mathcal{R}[a, b]$ y denotamos el valor de la integral por

$$\int_a^b f(x)\, dx \qquad ó \qquad \int_a^b f\, dx. \tag{7.7}$$

Por (7.4) sabemos que si $f \in \mathcal{R}[a,b]$ existe $K \in \mathbb{R}$ tal que

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq K(b-a).$$

Definición 7.2 Si P_1 y P_2 son particiones de $[a,b]$ decimos que P_2 es un *refinamiento* de P_1 si $P_1 \subset P_2$.

Teorema 7.1 *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada, P_1 y P_2 particiones de $[a,b]$ tales que P_2 es un refinamiento de P_1, entonces*

$$S(P_2,f) \leq S(P_1,f); \qquad I(P_2,f) \geq I(P_1,f).$$

Demostración. Supongamos que $P_1 = \{x_0, x_2, \ldots, x_n\}$ y P_2 contiene un solo punto adicional que llamaremos y. Como $y \in [a,b]$, $y \notin P_1$, necesariamente se tiene para algún $i, 1 \leq i \leq n$, que $x_{i-1} < y < x_i$ y por lo tanto las sumas $S(P_2,f)$ y $S(P_1,f)$ difieren solo en los términos que corresponden a este intervalo:

$$S(P_1,f) - S(P_2,f) = M_i(x_i - x_{i-1}) - M'(x_i - y) - M''(y - x_{i-1})$$

donde

$$\begin{aligned} M' &= \sup\{f(x) : y < x < x_i\} \leq M_i, \\ M'' &= \sup\{f(x) : x_{i-1} < x < y\} \leq M_i, \end{aligned}$$

y entonces (ver figura 7.3)

$$S(P_1,f) - S(P_2,f) = (M_i - M')(x_i - y) + (M_i - M'')(y - x_{i-1}) \geq 0.$$

Si P_2 difiere de P_1 en m puntos, se repite el razonamiento anterior m veces para obtener la desigualdad deseada. La otra desigualdad se prueba de manera similar. ∎

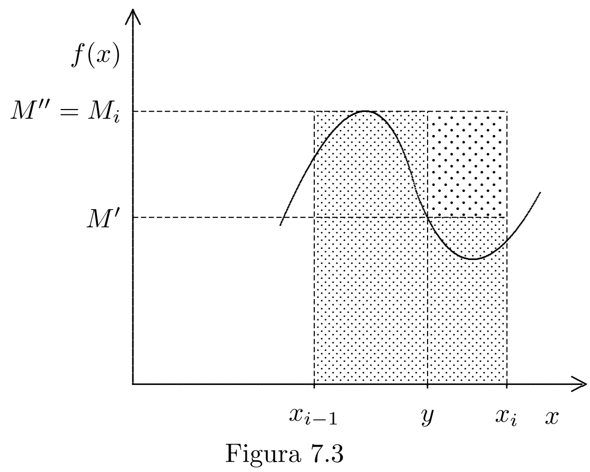

Figura 7.3

Corolario 7.1 *Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y P_1 y P_2 dos particiones cualesquiera de $[a,b]$. Entonces*

$$I(P_1, f) \leq S(P_2, f).$$

Demostración. Dadas P_1 y P_2 sea P^* el refinamiento común de ambas particiones, que definimos como $P^* = P_1 \cup P_2$. Entonces

$$I(P_1, f) \leq I(P^*, f) \leq S(P^*, f) \leq S(P_2, f).$$

■

Teorema 7.2 *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada, entonces*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Demostración. Sea Q una partición de $[a,b]$. Para cualquier $P \in \mathcal{P}[a,b]$ se tiene

$$I(P, f) \leq S(Q, f).$$

Por lo tanto $S(Q, f)$ es una cota superior para el conjunto

$$\{I(P, f) : P \in \mathcal{P}[a,b]\}$$

y entonces

$$S(Q, f) \geq \sup\{I(P, f) : P \in \mathcal{P}[a,b]\} = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Ahora observamos que $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ es una cota inferior del conjunto

$$\{S(Q, f) : Q \in \mathcal{P}[a,b]\}$$

y obtenemos finalmente

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \inf\{S(Q, f) : Q \in \mathcal{P}[a,b]\} = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

■

Ejercicios 7.1

1. *Sea $f : [a,b] \to R$ definida por $f(x) = c$ para algún $c \in \mathbb{R}$ y $x \in [a,b]$. Demuestre a partir de la definición que $f \in \mathcal{R}[a,b]$ y $\int_a^b f dx = c(b-a)$.*

2. *Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ está definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & si\ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

demuestre que

$$\overline{\int_0^1} f\,dx = 1, \qquad \underline{\int_0^1} f\,dx = 1$$

de modo que $f \notin \mathcal{R}[0,1]$.

3. *Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ está definida por $f(x) = x$ demuestre que $f \in \mathcal{R}[0,1]$ y $\int_0^1 f\,dx = 1/2$.*
4. *Si $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ es un subconjunto finito de $[a,b]$ y si la función acotada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ vale 0 en todo punto de $[a,b]$ que no esté en S entonces f es integrable en $[a,b]$ y $\int_0^1 f\,dx = 0$.*
5. *Demuestre que todo polinomio P es integrable en el intervalo compacto $[a,b]$.*
6. *Si $f \in \mathcal{R}[0,1]$ y definimos para $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(i/n)$, entonces la sucesión (a_n) converge a $\int_0^1 f\,dx$*
7. *Definición: la función f es integrable sobre $[a,b]$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ y un número ℓ tal que $|\ell - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i| < \varepsilon$, donde $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ es una partición de $[a,b]$ y la desigualdad se satisface para cualquier partición tal que $\max(\delta x_i) < \delta$ y cualquier selección de ξ en $[x_{i-1}, x_i]$. Demuestre que esta definición es equivalente a la que dimos en la sección 7.1.*

7.2. Condiciones para Integrabilidad

Teorema 7.3 (Criterio de Riemann) *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada. $f \in \mathcal{R}[a,b]$ si y sólo si dado $\epsilon > 0$ existe una partición $P \in \mathcal{P}[a,b]$ tal que*

$$0 \leq S(P,f) - I(P,f) \leq \epsilon \tag{7.8}$$

Demostración. Supongamos que para cada $\epsilon > 0$ hay una partición de $[a,b]$ tal que (7.8) vale. Entonces, dado $\epsilon > 0$ para alguna $P \in \mathcal{P}[a,b]$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq S(P,f) < I(P,f) + \epsilon \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx + \epsilon$$

y usando el teorema 7.2

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx < \epsilon.$$

Como esta desigualdad es cierta para todo $\epsilon > 0$ se tiene que

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

y $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

Supongamos ahora que $f \in \mathcal{R}[a,b]$ y sea $\epsilon > 0$. Existen particiones P_1 y P_2 en $\mathcal{P}[a,b]$ tales que

$$0 \leq S(P_1, f) - \overline{\int_a^b} f(x)\, dx < \frac{\epsilon}{2}$$
$$0 \leq \underline{\int_a^b} f(x)\, dx - I(P_2, f) < \frac{\epsilon}{2}$$

Tomemos $P = P_1 \cup P_2$, el refinamiento común de P_1 y P_2. Por el Teorema 7.1 y usando el hecho de que

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$$

obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq S(P,f) - I(P,f) \leq S(P_1,f) - I(P_2,f) \\ &= S(P,f) - \int_a^b f\, dx + \int_a^b f\, dx - I(P_2,f) < \epsilon. \end{aligned}$$

■

Teorema 7.4 *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es monótona entonces $f \in \mathcal{R}[a,b]$.*

Demostración. Supongamos que f es creciente. La demostración para el caso decreciente es similar y la omitiremos. Dado $\epsilon > 0$ escogemos $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{\epsilon} < n$$

Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ la partición que divide al intervalo $[a,b]$ en n intervalos iguales, entonces

$$\begin{aligned} 0 \leq S(P,f) - I(P,f) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) \\ &= \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \\ &= \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{n} < \epsilon \end{aligned}$$

y por el Teorema 7.3, $f \in \mathcal{R}[a,b]$. ■

Teorema 7.5 *Si la función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua entonces es integrable, es decir, $\mathcal{C}[a,b] \subset \mathcal{R}[a,b]$.*

Demostración. Como f es continua y $[a,b]$ es compacto, f es uniformemente continua en $[a,b]$. Así, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in [a,b]$ y $|x-y| < \delta$ se tiene

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{(b-a)}. \tag{7.9}$$

Escojamos ahora $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{b-a}{\delta} < n$$

y sea $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ la partición que divide el intervalo $[a,b]$ en n partes iguales. Para cada $i, 1 \leq i \leq n$ escogemos puntos u_i, v_i en $[x_{i-1}, x_i]$ de modo que

$$f(u_i) = M_i \qquad f(v_i) = m_i$$

lo cual es posible porque tenemos una función continua sobre un intervalo compacto. Ahora bien, tanto u_i como v_i estan en $[a,b]$ y

$$|u_i - v_i| \leq x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} < \delta$$

y concluimos por (7.9) que para $i, 1 \leq i \leq n$,

$$0 \leq M_i - m_i = f(u_i) - f(v_i) < \frac{\epsilon}{(b-a)}.$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} 0 &\leq S(P,f) - I(P,f) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &< \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \epsilon. \end{aligned}$$

y por el Teorema 7.3 $f \in \mathcal{R}[a,b]$. ■

Teorema 7.6 *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada con una cantidad finita de discontinuidades, entonces f es integrable.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ dado y $M = \sup |f(x)|$. Sean $y_1, \dots, y_p$ los puntos en los cuales la función es discontinua y consideremos los intervalos $(y_j - \eta, y_j + \eta)$ donde η satisface $\eta < \epsilon/8Mp$.

El conjunto $K = [a,b] \setminus \bigcup_{j=1}^{p} (y_j - \eta, y_j + \eta)$ es compacto y f es uniformemente continua en él por el Teorema 5.14. Por lo tanto existe $\delta > 0$ tal que si $s \in K, t \in K, |s-t| < \delta$ entonces $|f(s) - f(t)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$. Ahora construimos una partición

$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ de la siguiente manera: los puntos $y_j - \eta, y_j + \eta$ están en P para $j = 1, \ldots, p$. Ningún punto de los intervalos $(y_j - \eta, y_j + \eta),\ j = 1, \ldots, p$ está en P. Si x_{i-1} no es de la forma $y_j - \eta$ para algún j, escogemos x_i de modo que $0 < x_i - x_{i-1} < \delta$. Por las condiciones descritas para la partición sabemos que estos últimos intervalos están en K y por lo tanto para ellos se tiene que

$$M_i - m_i \leq \frac{\epsilon}{2(b-a)}.$$

En cambio, para un intervalo de la forma $(x_{i-1} = y_j - \eta, x_i = y_j + \eta), j = 1, \ldots, p$ se tiene que $M_i - m_i \leq 2M$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 0 &\leq S(P, f) - I(P, f) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum{}' (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) + \sum{}'' (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

donde la suma $\sum'$ es sobre los índices tales que el intervalo (x_{i-1}, x_i) es de la forma $(y_j - \eta, y_j + \eta)$ y $\sum''$ es la suma sobre el resto. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} 0 &\leq S(P, f) - I(P, f) \\ &\leq 2M \sum{}' (x_i - x_{i-1}) + \frac{\epsilon}{2(b-a)} \sum{}'' (x_i - x)_{i-1}) \\ &\leq 2Mp2\eta + \frac{\epsilon}{2(b-a)}(b-a) \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

■

7.3. Propiedades de la Integral

Teorema 7.7 (Linealidad de la Integral)

(i) Si f y g son integrables en $[a, b]$ entonces $f + g$ también y

$$\int_a^b (f + g)\, dx = \int_a^b f\, dx + \int_a^b g\, dx.$$

(ii) Si $f \in \mathcal{R}[a, b]$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $\lambda f \in \mathcal{R}[a, b]$ y

$$\int_a^b \lambda f\, dx = \lambda \int_a^b f\, dx.$$

Demostración. Sea $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición de $[a,b]$ y llamemos $h = f + g$. Observamos que

$$\begin{aligned}
\inf\{h(x) : x_i \le x \le x_{i+1}\} &\ge \inf\{f(x) : x_i \le x \le x_{i+1}\} \\
&\quad + \inf\{g(x) : x_i \le x \le x_{i+1}\}, \\
\sup\{h(x) : x_i \le x \le x_{i+1}\} &\le \sup\{f(x) : x_i \le x \le x_{i+1}\} \\
&\quad + \sup\{g(x) : x_i \le x \le x_{i+1}\}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para cualquier partición P tenemos

$$I(P,f) + I(P,g) \le I(P,h) \le S(P,h) \le S(P,f) + S(P,g). \tag{7.10}$$

Como f y g son integrables, dado $\epsilon > 0$ existen particiones P_1 y P_2 tales que

$$S(P_1,f) - I(P_1,f) < \frac{\epsilon}{2}\,; \qquad S(P_2,g) - I(P_2,g) < \frac{\epsilon}{2}. \tag{7.11}$$

Sea P el refinamiento común de P_1 y P_2, a partir de (7.9) y (7.11) obtenemos

$$S(P,h) - I(P,h) < \epsilon \tag{7.12}$$

lo cual muestra que $h \in \mathcal{R}[a,b]$.

Usando (7.9) y (7.11) obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_a^b h\,dx \le S(P,h) &\le S(P,f) + S(P,g) \\
&< I(P,f) + I(P,g) + \epsilon \\
&\le \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx + \epsilon
\end{aligned}$$

y como $\epsilon > 0$ es arbitrario concluimos que

$$\int_a^b (f+g)\,dx \le \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx.$$

De manera similar se demuestra la desigualdad en el otro sentido. La demostración de (ii) queda como ejercicio. ■

Teorema 7.8 *Si $f \in \mathcal{R}[a,b]$ y $f \ge 0$ en $[a,b]$ entonces*

$$\int_a^b f\,dx \ge 0.$$

Demostración. Es inmediata a partir de la definición. ■

Corolario 7.2 *Si $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ con $f \ge g$ en $[a,b]$ entonces*

$$\int_a^b f\,dx \ge \int_a^b g\,dx.$$

Demostración. Como $f - g \geq 0$ obtenemos

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^b (f-g)\,dx + \int_a^b g\,dx \geq \int_a^b g\,dx.$$

■

Corolario 7.3 *Si $f \in \mathcal{R}[a,b]$ y $k \leq f(x) \leq K$ para $x \in [a,b]$ entonces*

$$k(b-a) \leq \int_a^b f\,dx \leq K(b-a).$$

Demostración. Definimos $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ por $g(x) = k$ y $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ por $h(x) = K$. Entonces $g \leq f \leq h$ y el Corolario anterior implica

$$k(b-a) = \int_a^b g\,dx \leq \int_a^b f\,dx \leq \int_a^b h\,dx = K(b-a).$$

■

Teorema 7.9 *Si $f \in \mathcal{R}[a,b]$ entonces $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$ y*

$$\left|\int_a^b f\,dx\right| \leq \int_a^b |f|\,dx.$$

Demostración. Definimos las funciones f^+ y f^- de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f^+(x) &= \text{máx}(f(x),0) \text{ para } x \in [a,b], \\ f^-(x) &= f^+(x) - f(x) \quad (= -\,\text{máx}(-f(x),0)), \end{aligned}$$

dada una partición P de $[a,b]$ usando la definición (7.1) observamos que

$$M_i(f^+) - m_i(f^+) \leq M_i(f) - m_i(f)$$

y por lo tanto

$$S(P,f^+) - I(P,f^+) \leq S(P,f) - I(P,f).$$

Una aplicación del Teorema 7.3 muestra que $f^+ \in \mathcal{R}[a,b]$. Ya que $f^- = f^+ - f$ se obtiene que $f^- \in \mathcal{R}[a,b]$. Como $|f| = f^+ + f^-$ concluimos que $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$ por el Teorema 7.7. Finalmente

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b f\,dx\right| &= \left|\int_a^b f^+\,dx - \int_a^b f^-\,dx\right| \\ &\leq \int_a^b f^+\,dx + \int_a^b f^-\,dx \\ &= \int_a^b |f|\,dx. \end{aligned}$$

■

Observamos que el enunciado recíproco no es cierto: $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$ no implica que $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Por ejemplo, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

entonces $|f|(x) = 1$ de modo que $|f| \in \mathcal{R}[0,1]$ pero

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = -1 \;; \qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = 1,$$

de modo que $f \notin \mathcal{R}[a,b]$.

Teorema 7.10 *Si f y $g \in \mathcal{R}[a,b]$ entonces $fg \in \mathcal{R}[a,b]$.*

Demostración. Sea $K = \sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$ y $h(x) = f^2(x)$. Veremos que $h \in \mathcal{R}[a,b]$. Para $x, y \in [a,b]$,

$$|h(x) - h(y)| = |f(x) + f(y)||f(x) - f(y)| \leq 2K|f(x) - f(y)|$$

y por lo tanto para cualquier partición $P \in \mathcal{P}[a,b]$,

$$M_i(h) - m_i(h) \leq 2K(M_i(f) - m_i(f)),$$

de donde deducimos

$$S(P,h) - I(P,h) \leq 2K(S(P,f) - I(P,f)).$$

Por el teorema 7.3 concluimos que $h \in \mathcal{R}[a,b]$. Como $fg = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2)$ por lo anterior y la linealidad de la integral concluimos que $fg \in \mathcal{R}[a,b]$. ■

Teorema 7.11 *Sea $f \in \mathcal{R}[a,b]$ y $a < c < b$, entonces $f \in \mathcal{R}[a,c]$, $f \in \mathcal{R}[c,b]$ y*

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx.$$

Demostración. Como $f \in \mathcal{R}[a,b]$, dado $\epsilon > 0$ existe una partición P de $[a,b]$ tal que $S(P,f) - I(P,f) < \epsilon$. Si $c \notin P$ lo añadimos obteniendo un refinamiento Q. Entonces

$$S(Q,f) - I(Q,f) \leq S(P,f) - I(P,f) < \epsilon.$$

Sea Q_1 la partición de $[a,c]$ que se obtiene tomando los puntos de Q que están en el intervalo $[a,c]$, entonces

$$S(Q_1,f) - I(Q_1,f) \leq S(Q,f) - I(Q,f) < \epsilon$$

de modo que $f \in \mathcal{R}[a,c]$. De manera similar se muestra que $f \in \mathcal{R}[c,d]$.

Tomemos ahora $P_1 \in \mathcal{P}[a,c]$, $P_2 \in \mathcal{P}[c,d]$ y $P = P_1 \cup P_2$, entonces $P \in \mathcal{P}[a,b]$ y es fácil ver que

$$\int_a^b f\,dx \leq S(P,f) = S(P_1,f) + S(P_2,f).$$

Tomando ínfimo sobre todas las particiones $P_1 \in \mathcal{P}[a,c]$ y $P_2 \in \mathcal{P}[c,b]$ se obtiene

$$\int_a^b f\,dx \leq \int_a^c f\,dx + \int_a^b f\,dx.$$

Un argumento similar con sumas inferiores muestra la desigualdad contraria. ■

Teorema 7.12 *Si $a < c < b$, $f \in \mathcal{R}[a,c]$ y $f \in \mathcal{R}[c,b]$ entonces $f \in \mathcal{R}[a,b]$ y*

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx.$$

Demostración. Ejercicio. ■

Ejercicios 7.2

1. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua y positiva sobre $[a,b]$ y si $f(c) > 0$ para algún $c \in [a,b]$ entonces $\int_a^b f\,dx > 0$.*
2. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua y positiva sobre $[a,b]$ y si $\int_a^b f\,dx = 0$, entonces $f(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$.*
3. *Si $f \in \mathcal{R}[a,b]$ y $P_n \in \mathcal{P}[a,b]$ divide $[a,b]$ en n partes iguales entonces las sucesiones $\{S(P_n;f)\}$ y $\{I(P_n;f)\}$ convergen a $\int_a^b f\,dx$.*
4. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua y $f(x) > 0$ para todo $x \in [a,b]$ entonces $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_a^x f\,dt$ es estrictamente creciente en $[a,b]$.*
5. *Sea g una función estrictamente creciente en el intervalo $[a,b]$. Demuestre que si f es monótona o continua, la función $f(g(x))$ es integrable en $[a,b]$.*
6. *Las siguientes funciones valen 0 para $x = 0$, por definición. Determine cuales de ellas pertenecen a $\mathcal{R}(0,1)$.*

$$(a)\,\exp(\operatorname{sen} x); \quad (b)\,\exp(\operatorname{sen} 1/x); \quad (c)\,\exp 1/x; \quad (d)\,\operatorname{sen}(\exp 1/x).$$

7. *Sean f y g funciones integrables en $[a,b]$.*
   (a) *Demuestre que fg es integrable en $[a,b]$. (Ayuda: $4fg = (f+g)^2 - (f-g)^2$).*
   (b) *Demuestre que $\max(f,g)$ y $\min(f,g)$ son integrables en $[a,b]$. (Ayuda: $\max(f,g) = \frac{1}{2}(f+g) + \frac{1}{2}|f-g|$).*

7.4. Integración y Diferenciación

En esta sección estudiaremos la relación que existe entre el concepto de integral tal como lo hemos estudiado en este capítulo y el proceso de integración considerado como operación inversa a la diferenciación.

Teorema 7.13 *Sea $f \in \mathcal{R}[a,b]$. La función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por*

$$F(x) = \int_a^x f dt, \qquad x \in [a,b]$$

es uniformemente continua.

Demostración. Como $f \in \mathcal{R}[a,b]$, f es acotada y definimos

$$M = \sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\}.$$

Si $a < x < y < b$ tenemos

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &= \left| \int_a^y f\,dt - \int_a^x f\,dt \right| = \left| \int_x^y f\,dt \right| \\ &\leq \int_x^y |f|\,dt \leq M(y-x). \end{aligned}$$

Dado $\epsilon > 0$ escogemos $\delta > 0$ de modo que $M\delta < \epsilon$, entonces si $|y - x| < \delta$ se tiene que $|F(y) - F(x)| < \epsilon$ y F es uniformemente continua. ■

Teorema 7.14 *Bajo la hipótesis del teorema anterior, si f es continua en $c \in (a,b)$ entonces F es diferenciable en c y $F'(c) = f(c)$.*

Demostración. Supongamos que f es continua en c. Dado $\epsilon > 0$ escogemos $\delta > 0$ tal que $|f(t) - f(c)| < \epsilon$ si $|t - c| < \delta$ y $t \in [a,b]$. Por lo tanto, si $c - \delta < s \leq c \leq t < c + \delta$ y $a \leq s < t \leq b$ se tiene

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(t) - F(s)}{t-s} - f(c) \right| &= \left| \frac{1}{t-s} \int_s^t f(u)\,du - f(c) \right| = \left| \frac{1}{t-s} \int_s^t (f(u) - f(c))\,du \right| \\ &\leq \frac{1}{t-s} \int_s^t |f(u) - f(c)|\,du < \epsilon \end{aligned}$$

de donde se obtiene que $F'(c) = f(c)$. ■

Como consecuencia de este resultado, si f es continua sobre (a,b) entonces el resultado anterior se cumple para todo $x \in (a,b)$, es decir

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

Teorema 7.15 *Si $f \in \mathcal{R}[a,b]$ y existe una función diferenciable F sobre $[a,b]$ tal que $F' = f$ entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, escogemos una partición $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ de $[a,b]$ de modo que $S(P,f) - I(P,f) < \epsilon/2$. Por el Teorema del Valor Medio existe $\xi \in (x_{i-1}, x_i)$ tal que

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(\xi_i)\Delta x_i \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Sumando sobre i obtenemos

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Pero como $m_i \le f(\xi_i) \le M_i$ para $i = 1, \ldots, n$ tenemos que

$$I(P,f) \le F(b) - F(a) \le S(P,f)$$

y además sabemos que

$$I(P,f) \le \int_a^b f\,dx \le S(P,f)$$

de donde deducimos que

$$\left| \int_a^b f\,dx - (F(b) - F(a)) \right| < \epsilon.$$

Como esto es cierto para todo $\epsilon > 0$ obtenemos la conclusión del teorema. ■

El teorema anterior nos permite calcular la integral de funciones que son derivadas de otras. Por ejemplo:

$$\int_a^b \cos x\,dx = \int_a^b (\operatorname{sen} x)'\,dx = \operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a,$$

$$\int_a^b e^x\,dx = e^b - e^a.$$

La relación entre diferenciación e integración que hemos establecido en los teoremas anteriores se extiende también a otras fórmulas. En particular, la diferenciación de un producto corresponde a la fórmula de integración por partes y a la diferenciación de funciones compuestas corresponde la fórmula para cambio de variables.

Teorema 7.16 (Integración por partes) *Si F y G son funciones diferenciables sobre $[a, b], F' = f \in \mathcal{R}[a, b],\ G' = g \in [a, b]$, entonces*

$$\int_a^b F(x)g(x)\,dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x)\,dx.$$

Demostración. Llamemos $H(x) = F(x)G(x)$, entonces

$$H'(x) = f(x)G(x) + F(x)g(x).$$

Usando el teorema 7.15 obtenemos

$$\begin{aligned} F(b)G(b) - F(a)G(a) = H(b) - H(a) &= \int_a^b H'(x)\,dx \\ &= \int_a^b f(x)G(x)\,dx + \int_a^b F(x)g(x)\,dx. \end{aligned}$$

■

Teorema 7.17 (Cambio de Variables) *Sea $g : I \to \mathbb{R}$ diferenciable con g' continua en I donde I es un intervalo abierto. Sean $a, b \in I$ con $g(a) < g(b)$, entonces si $f : [g(a), g(b)] \to \mathbb{R}$ es continua se tiene que $f \in \mathcal{R}[g(a), g(b)],\ (f \circ g)g' \in \mathcal{R}[a, b]$ y*

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx = \int_a^b (f \circ g)(y)g'(y)\,dy.$$

Demostración. La integrabilidad de las funciones es consecuencia de la continuidad. Definimos $F : [g(a), g(b)] \to \mathbb{R}$ por

$$F(y) = \int_{g(a)}^{y} f(x)\,dx \qquad y \in [g(a), g(b)]$$

entonces F es diferenciable en todo punto de $(g(a), g(b))$ y $F'(y) = f(y)$ para $y \in (g(a), g(b))$. Definimos ahora $H : [a, b] \to \mathbb{R}$ por $H = F \circ g$. Esta función tiene derivada en todo (a, b) y por la regla de la cadena

$$\begin{aligned} H'(x) &= F'(g(x))g'(x) \\ &= (f \circ g)(x)g'(x) \quad \text{para } x \in (a, b). \end{aligned}$$

Por el Teorema 7.13

$$H(b) - H(a) = \int_a^b (f \circ g)(x)g'(x)\,dx.$$

Como $H(a) = 0$ y $H(b) = \int_{g(a)}^{g(b)} f\,dx$ el resultado queda demostrado. ■

7.5. El Teorema de Taylor

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $f^{(n)}(x)$ existe para $a \le x \le b$ y es integrable en este intervalo. Para $0 \le t \le 1$ tenemos

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\sum_{r=1}^{n-1} \frac{(b-a)^r}{r!}(1-t)^r f^{(r)}(a+t(b-a))\right) \\
&\qquad = -\sum_{r=1}^{n-1} \frac{(b-a)^r}{(r-1)!}(1-t)^{r-1} f^{(r)}(a+t(b-a)) \\
&\qquad\quad + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{(b-a)^{r+1}}{r!}(1-t)^r f^{(r+1)}(a+t(b-a)) \\
&\qquad = \frac{(b-a)^n}{(n-1)!}(1-t)^{n-1} f^{(n)}(a+t(b-a)) - (b-a)f'(a+t(b-a)).
\end{aligned}$$

El segundo miembro de esta expresión es integrable según Riemann respecto a t sobre $[0,1]$ y por lo tanto también lo es el primer miembro. Integrando sobre $[0,1]$ y usando el Teorema 7.16 obtenemos

$$-\sum_{r=1}^{n-1} \frac{(b-a)^r}{r!} f^{(r)}(a) = \int_0^1 \frac{(b-a)^n}{(n-1)!}(1-t)^{n-1} f^{(n)}(a+t(b-a))dt - f(b) + f(a)$$

y de aquí obtenemos

$$f(b) = f(a) + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{(b-a)^r}{r!} f^{(r)}(a) + \frac{(b-a)^n}{(n-1)!}\int_0^1 (1-t)^{n-1} f^{(n)}(a+t(b-a))\,dt.$$

Esta es la fórmula de Taylor con forma integral para el resto.

Ejercicios 7.3

1. *Calcule* $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x e^{t^2}\,dt$
2. *Sea f una función continua en $\mathbb{R}$. Definimos*

   $$F(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt \qquad \text{para } x \in \mathbb{R}$$

   Demuestre que F es diferenciable en $\mathbb{R}$ y calcule F'.
3. *Sean f y g funciones definidas en $[a,b]$, f es monótona y tal que $f' \in \mathcal{R}(a,b)$ y $g \in \mathcal{R}(a,b)$. Demuestre que existe $c \in [a,b]$ tal que*

   $$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^c g(x)\,dx + f(b)\int_c^b g(x)\,dx.$$

4. *Sea f una función decreciente y positiva suponga y f', $g \in \mathcal{R}(a,b)$. Demuestre que existe $c \in [a,b]$ tal que*

   $$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^c g(x)\,dx.$$

Ejercicios Complementarios

1. *Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *unan función continua y sea* $g \in \mathcal{R}(a, b)$ *una función positiva. Demuestre que existe* $a < c < b$ *tal que*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

2. *Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *unan función continua. Demuestre que existe* $c \in [a, b]$ *tal que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b - a).$$

3. *Para* f, g *en* $\mathcal{C}[a, b]$, $|f - g| \in \mathcal{C}[a, b]$ *y podemos definir* $d(f, g) = \int_a^b |f - g|dx$.

   a) *Muestre que* d *es una métrica en* $\mathcal{C}[a, b]$ *pero este espacio no es completo.*

   b) *Demuestre que la función* d *no es una métrica en el espacio* $\mathcal{R}[a, b]$.

4. *Sean* f *y* g *funciones positivas con derivadas positivas y continuas para* $x \geq 0$. *Si* $f(0) = 0$ *demuestre que*

$$f(a)g(b) \leq \iint_0^a g(x)f'(x)\,dx + \int_0^b f(x)g'(x)\,dx \quad (0 < a \leq b).$$