Universidad Autónoma de Yucatán
Facultad de Matemáticas

Sistemas de fusión para grupos, acciones y representaciones

TESIS

presentada por:

Antonio González Fernández

En opción al título de:

Licenciado en Matemáticas

Asesores:

José María Cantarero López y Jesús Efrén Pérez Terrazas

Mérida, Yucatán, México Agosto de 2016

Agradecimientos

A Fernando y a Lizbeth, mis padres, por tenerme la paciencia y el amor para enseñarme siempre y motivarme a estudiar matemáticas. Sin su apoyo no hubiera alcanzado a hacer tantas de las cosas que he logrado. A mi novia por ser mi motivadora personal de forma constante y preocuparse de cuidarme siempre, porque yo no lo hago.

A mis asesores los doctores José María Cantarero López y Jesús Efrén Pérez Terrazas, por la paciencia de traducir mis enunciados rebuscados y casi criptográficos en cada explicación que les di, por haberme acercado a un conocimiento matemático más profundo y por permitirme ser su alumno una última vez en mi licenciatura.

A los Dres. Carles Broto Blanco y Lluís Puig Carreras por sus respuestas relativas al origen histórico del objeto de estudio en esta tesis y sus vastas explicaciones sobre el mismo para elaborar el origen histórico expuesto a continuación (espero haberlo explicado de forma justa y parcial). También agradecerle al Dr. Geoffrey R. Robinson, por el ejemplo 2.28.

Al Centro de Investigación en Matemáticas, A.C. Unidad Mérida por concederme una beca del Fondo Mixto YUC-2013-C14-221183 para la elaboración del presente proyecto de tesis. Espero sea un trabajo merecedor del apoyo otorgado.

Y por supuesto, a la Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Nunca hubiera estudiado matemáticas de no ser por su existencia.

Índice

Introducción

Origen histórico

El concepto de sistema de fusión radica en dos vertientes muy separadas sobre el uso de esta idea: tanto la topología como el álgebra introdujeron este concepto y lo utilizaron para distintos fines.

Una pieza que motivaría a los algebristas a trabajar en una categoría como ésta fue el teorema que Georg Frobenius probó afirmando que "*para un primo p y un grupo finito G, si el cociente del normalizador por el centralizador de cualquier p-subgrupo de G es un p-grupo, entonces G tiene un subgrupo normal de orden primo a p tal que el cociente es un p-grupo*".

En los años setenta se introdujo el concepto de *Categoría sobre P* o *P-categoría*, en los seminarios de Claude Chevalley. Aunque el concepto en ese momento no se hiciese conocido sino hasta treinta años después, ya en 1971 Daniel Quillen haría uso de una categoría compuesta de p-subgrupos elementales abelianos de un grupo G (grupos de la forma $(\mathbb{Z}/p)^n$) cuyos morfismos fuesen definidos como conjugaciones por elementos de G entre estos en *The spectrum of an equivariant cohomology ring I, II* ([27], I, p.567) para obtener resultados topológicos. En 1976 Lluís Puig en su tesis de doctorado titulada *Structure locale dans les groupes finis* definiría lo que son los p-subgrupos esenciales ([26], p.11). En 1978 Quillen realizaría un trabajo de bastante influencia bajo el título *Homotopy properties of the poset* *of nontrivial p-subgrupos of a group* en el cual enfocó su interés en considerar categorías basadas en los p-subgrupos de un grupo para obtener información sobre los grupos de homología. Todos los trabajos tenían por idea el trabajar un grupo basándose en el uso de una categoría cuyos objetos tuvieran relación con los p-subgrupos del grupo.

A principios de los años noventa, el mismo Puig empezaría sus famosas *notas no publicadas*, misma década donde comenzarían mayores avances en el estudio de dichas categorías, incluso sin ya tener un nombre concreto establecido†. Fue en el primer otoño de la misma década cuando se realizaría un estudio más profundo de las categorías de Frobenius en el Instituto de Investigación en Ciencias Matemáticas (MSRI). Las mismas conferencias serían continuadas en 1991 en la Universidad de Warwick obteniendo como uno de los resultados importantes de las mismas el concepto de *categoría abstracta de Frobenius*, dándole finalmente un nombre oficial al nuevo concepto.

En 1993 Puig finaliza dichas notas, que serían *la* referencia clave para el desarrollo del concepto de los sistemas de fusión (aunque fuesen llamadas principalmente como P-categorías en su artículo). Sin embargo no las publicaría hasta años después ([24]). En marzo de 1994, Dave Benson realiza una plática titulada *Sporadic groups, loop spaces and the Dickson invariants* en los seminarios de Chevalier donde explica sus hallazgos de espacios topológicos a partir de *estructuras locales*. Las estructuras que Benson utilizó fueron definidas por Ronald Solomon en los años sesenta, y no eran ni más ni menos que categorías de Frobenius. Esto hará que Puig motive a Benson a realizar sus investigaciones usando como herramientas las categorías de Frobenius.

A partir de esta ponencia, Benson empieza a estudiar las categorías de Frobenius desde la perspectiva topológica para construir espacios topológicos con ciertas características. Sería

† Aunque habían muchas variantes de ésta categoría, en esencia todas se basaban de una P-categoría de Frobenius. Por ejemplo, Guido Mislin bautiza a las subcategorías descrita por Quillen sobre p-subgrupos elementales como las *categorías de Quillen* en [22].

Benson el primero en ver una conexión entre la teoría de homotopía y el avance algebraico sobre las P-categorías reflejado en el trabajo de Puig.

Es durante finales de los años noventa (1998) cuando expone estos avances refiriendo a las estructuras en el trabajo de Puig como una manera de codificar información local, lo que llama el interés de Carles Broto, Ran Levi y Bob Oliver para comenzar su trabajo conjunto *The homotopy of fusion systems* que sería publicado hasta el año 2003 ([4]).

Durante esta transición, se dejan de llamar a las categorías de Frobenius como tal, y son definidas bajo el nombre de *sistemas de fusión*. En particular, las categorías de Frobenius definidas por Puig son los sistemas de fusión *saturados* definidos por Broto et al. en [4]. El motivo principal del cambio de nombre del concepto entre estos autores es debido a que la perspectiva de sus trabajos es distinta. En la perspectiva topológica se apreció la información de fusión de los p-grupos para el estudio de los espacios clasificantes [4]. La perspectiva algebraica apreció más el estudio de estructuras p-locales de grupos para acercarse al entendimiento de los bloques de Brauer haciendo uso de las categorías de Frobenius [25].

Actualmente, el estudio de los sistemas de fusión se centra en hallar sistemas de fusión exóticos, pues estos satisfacen situaciones muy deseables. Un ejemplo de una resultado facilitado en los sistemas de fusión exótico es el obtenido por Broto et al. en [4]: para cualquier grupo p-local finito $(S, \mathcal{F}, \mathcal{L})$ y cualquier p-grupo finito Q, $[BQ, |\mathcal{L}|_p^\wedge]$ puede calcularse como el conjunto de homomorfismos de Q a S bajo la relación determinada por la conjugación dada por $\mathcal{F}$. Esto es,

$$[BQ, |\mathcal{L}|_p^\wedge] \cong \mathrm{Hom}(Q, S)/(\mathcal{F}\text{-conjugación})$$

La principal motivación fue la conjetura de Martino-Priddy (1996), que establece que *para cualquier par de grupos finitos G, G', $BG_p^\wedge \simeq BG_p'^\wedge$ si y sólo si hay un isomorfismo*

$\rho\colon S \longrightarrow S'$ *que induce un isomorfismo entre los sistemas de fusión* $F\colon \mathcal{F}_S(G) \longrightarrow \mathcal{F}_{S'}(G')^{\dagger}$, donde $BG_p^{\wedge}$ es la p-completación del espacio clasificante del grupo G. Actualmente es un teorema.

Martino y Priddy probaron que la existencia de tal isomorfismo es *necesaria* para que $BG_p^{\wedge} \simeq BG_p'^{\wedge}$ y Bob Oliver demostraría que además era *suficiente* en *Equivalences of classifying spaces completed at odd primes* y *Equivalences of classifying spaces completed at the prime two* publicados en 2004 y 2006 utilizando la clasificación de grupos simples finitos. Posteriormente George Glaubermann y Justin Lynd haciendo uso de un artículo de Andrew Chermak ([7]) y el resultado de Oliver, demostraron la *vuelta* realizando ciertos ajustes a las pruebas de los dos anteriores para evitar el uso de la clasificación de grupos simples finitos en 2015 ([11]).

Gracias al desarrollo que abarca el uso de los sistemas de fusión, la prueba de este teorema hace mucho más preciso el resultado de Cartan y Eilenberg en cohomología de grupos: $H^*(BG;\mathbb{F}_p)$ *es determinado por* $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$ *y la fusión en* S ([6]), que termina dando por resultado que

$$H^*(BG;\mathbb{F}_p) \cong \varprojlim_{\mathcal{F}_S(G)} H^*(BP;\mathbb{F}_p)$$

Dado que el artículo de Broto, Levi y Oliver dio ciertos avances al entendimiento de espacios clasificantes de grupos usando las estructuras mencionadas, este proyecto motiva a Matthew Gelvin a buscar una generalización del mismo concepto y da lugar a lo que se conoce como un *sistema de acción de fusión* en su tesis *Fusion action systems* ([10]).

La tesis de Gelvin centraría su atención al estudio de sistemas de acción de fusión, dado que así es posible obtener el anillo de cohomología de otros espacios utilizando el G-espacio EG,

†Cabe mencionar el hecho curioso de que Martino y Priddy llaman al sistema de fusión una categoría de Frobenius (p.1), además de que hacen uso de [casi] todos los artículos anteriormente mencionados aquí para elaborar su artículo es decir, el recubridor universal de BG:

$$H^*(EG \times_G X;\ \mathbb{F}_p) \cong \varprojlim_{\mathfrak{X}_S(G,X)} H^*(BP; \mathbb{F}_p).$$

En este resultado X es un G-conjunto finito.

Como es de notarse, el uso de los sistemas de fusión es algo casi reciente, pues el registro más antiguo sobre su uso es de 1971 (podría decirse que tiene unos 45 años) con su aplicación en un artículo de David Quillen. Es por ello que resulta de gran importancia considerarlo un tema de interés pues es relativamente nuevo.

Sobre la tesis

En la siguiente tesis se explican los conceptos de sistema de fusión, sistema de acción de fusión, y sistema de representación de fusión, haciendo hincapié en el teorema de Alperin para sistemas de fusión saturados, dando una generalización del mismo sobre sistemas de acción de fusión saturados y en los sistemas de representación de fusión. También se dan en detalle demostraciones del apéndice del artículo *The homotopy theory of fusion systems*, y la tesis *Fusion action systems*.

En el primer capítulo se exponen las bases preliminares necesarias para entender adecuadamente los capítulos posteriores, incluyendo la teoría y elementos necesarios sobre teoría de grupos, categorías, cohomología y topología algebraica. Enunciamos los teoremas de mayor importancia para su uso posterior y abarcamos parte de lo necesario para comprender la conjetura de Martino-Priddy. Se hace énfasis únicamente en los teoremas que servirán para el desarrollo de la teoría en los capítulos posteriores.

El segundo capítulo se divide en tres partes. La primera parte contiene teoría esencial sobre los sistemas de fusión incluyendo los conceptos necesarios para dar los axiomas de saturación. La segunda parte contiene conceptos importantes de subgrupos céntrico, radical y esencial, además de explicar en forma más detallada las demostraciones dadas por Puig en [25] y [24] y Broto et al. en [4]. Se explican de forma detallada ejemplos sobre sistemas de fusión, los subgrupos esenciales del grupo Matthieu$_{12}$, y un ejemplo donde se demuestra que el hecho de que un subgrupo sea esencial no implica que necesariamente sean radicales y céntricos. La tercera parte desarrolla las herramientas pertinentes para la elaboración del teorema de Alperin para sistemas de fusión saturados igualmente dada por Broto et al. anteriormente en [4] tomado de las notas no publicadas (Apéndice, Teo. A10), dando detalle de cada parte del mismo.

El tercer capítulo abarca parte del estudio de la teoría de sistemas de acción de fusión realizada por Gelvin en [10], y se exponen los estudios realizados por él sobre el tema, corrigiendo detalles en sus demostraciones y extendiéndolas para un mayor entendimiento. Se define el concepto de subgrupo radical y subgrupo X-radical para su uso posterior al final del capítulo, donde se prueba que el teorema de Alperin demostrado en [4] también es válido para sistemas de acción de fusión saturados, el cual no había sido realizado previamente.

El cuarto capítulo da una adaptación del concepto de sistema de acción de fusión de Gelvin a un sistema de representación de fusión, el cual es una generalización del mismo sustituyendo el uso de un conjunto finito por un espacio vectorial sobre el que actúe un grupo finito linealmente. Se explica que todos los detalles implicados de un sistema de acción se pueden extender a los sistemas de representación pues la manera en que son desarrolladas.

Capítulo 1

Bases preliminares

El siguiente capítulo está dedicado a proveer al lector de las herramientas necesarias para el buen comprendimiento de los capítulos posteriores. Se recomienda tener conocimientos básicos de teoría de grupos y topología algebraica. Cada una de las secciones expuestas a continuación contiene conceptos y teoremas que se aplicarán en los resultados de los sistemas (de acción) de fusión y la propia concretización del concepto. Se demostrarán los teoremas que se consideren necesarios para resultados en los capítulos posteriores. Para mayor estudio de estos temas, el lector puede acudir a [5], [8], [9], [13], [14] y [17].

1.1 Teoría de grupos

La bibliografía para esta sección se contiene en [8], [9], [13] y [17].

Los grupos que se considerarán serán finitos, a menos que se afirme lo contrario. Denotaremos a G por un grupo, P por un subgrupo, y se denotará por $P \leq G$ cuando P sea un subgrupo de G; si el subgrupo P es normal en G, se denotará por $P \trianglelefteq G$. Si $H \leq G$, y $g \in G$, se denotará por ${}^{g}H$ al grupo gHg^{-1}. Para decir que un grupo G está generado por ciertos elementos $\alpha_1, \dots \alpha_k$ con ciertas restricciones $\beta_1, \dots, \beta_l$, se escribirá como $G = \langle \alpha_1, \dots \alpha_k | \ \beta_1, \dots, \beta_l \rangle$.

Definición 1.1. Dado un grupo G y $P \leq G$, se define el subgrupo *centralizador* de P en G como el conjunto $C_G(P) = \{g \in G \mid gp = pg$ para todo $p \in P\}$.

Definición 1.2. Dado un grupo G, y $P \leq G$, se define el subgrupo *normalizador* de P en G como el conjunto $N_G(P) = \{g \in G | gPg^{-1} = P\}$.

Es fácil comprobar que ambos son subgrupos de G. Nótese que cuando G es abeliano, $C_G(P) = G$, y en el caso de que P sea normal en G, $N_G(P) = G$. El siguiente enunciado es conocido como el primer teorema de isomorfismos:

Teorema 1.3. *Dado un homomorfismo de grupos $f\colon G \longrightarrow H$, y $N \trianglelefteq G$, entonces f puede factorizarse de manera única a través de un epimorfismo $\pi\colon\ G \to G/N$ si y sólo si $N \leq \ker f$.*

Del teorema 1.3 si $N = \ker f$, puede obtenerse el corolario $G/N \cong \operatorname{Im} f$, y es así como está enunciado normalmente en la mayoría de los libros este teorema. Sin embargo, la expuesta aquí es una generalización más agradable.†

El origen de un sistema de acción de fusión (que se enunciará posteriormente) se basa en la acción de un grupo sobre un conjunto finito. Es por esto que esta sección termina siendo esencial para su estudio.

Definición 1.4. Dado un grupo G y un conjunto X no vacío, se define una *acción de un grupo* como una función

$$\cdot\colon G \times X \to X$$

denotada usualmente como $(g, x) \mapsto g \cdot x$, que cumple las siguientes condiciones:

- Si e_G es el elemento neutro de G, se tiene que $e_G \cdot x = x$ para toda x en X.

†Para mayor detalle puede verse en [13] y [8]

- Para $g_1, g_2 \in G$, se cumple que $g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x$ para toda x en X.

A un conjunto X sobre el que actúa G, se le llama un G-conjunto.

Ejemplo 1.5. Dados el conjunto $X = \{1, -1, i, -i\}$, y el grupo $G = \mathbb{Z}/4 = \{\ [0], [1], [2], [3]\ \}$, definimos una acción mediante la operación $\cdot\colon G \times X \to X$ donde $[n] \cdot x = e^{2\pi i n/4}x$. Notemos que $[0] \cdot x = e^{2\pi i 0/4}x = 1x = x$, y si consideramos $a, b \in G$,

$$([a] \cdot ([b] \cdot x)) = e^{2\pi i a/4}(e^{2\pi i b/4}x) = e^{2\pi i(a+b)/4}x = e^{2\pi i[a+b]/4}x = [a+b] \cdot x,$$

lo cual deja una acción bien definida.

Ejemplo 1.6. Un grupo G puede actuar sobre sí mismo bajo la operación $\varphi\colon G \times G \to G$ donde $\varphi(g, h) = g \cdot h$, y la operación $\cdot$ es la operación definida en G. Claramente se cumplen todas las condiciones para ser una acción.

Definición 1.7. Dado un grupo G y una acción de G en X, se define el *kernel de la acción o el núcleo de la acción* como el conjunto de elementos de G que actúan trivialmente sobre X.

Es fácil ver que el kernel de una acción de G sobre un conjunto X es un grupo.

Definición 1.8. Dado un grupo G y dos G-conjuntos X, Y, se dice que X e Y son G-isomorfos si se cumple que hay una función biyectiva $\rho\colon X \longrightarrow Y$ con una función inversa ρ^{-1} tales que $\rho(g \cdot x) = g \cdot \rho(x)$ y $\rho^{-1}(g \cdot x) = g \cdot \rho^{-1}(x)$. A la equivalencia entre estos conjuntos se le denota $X \cong_G Y$.

Definición 1.9. Se define la acción de *conjugación* de un grupo sobre sí mismo como la función $\cdot\colon G \times G \to G$ donde $(g, h) \mapsto ghg^{-1}$. La acción de conjugación de g sobre h se denotará como $c_g(h) = ghg^{-1}$.

Definición 1.10. Sea G un grupo y X un G-conjunto. Se define un *punto fijo* de X bajo la acción de G a un elemento $x \in X$ tal que $g \cdot x = x$ para todo $g \in G$. Si un elemento $g \in G$ actúa trivialmente sobre un elemento $x \in X$, se dice que *g fija a x* bajo la acción de G. Al conjunto de puntos fijos de X bajo la acción de G se le denota X^G.

Definición 1.11. Dado un elemento a de un G-conjunto X, se define el *estabilizador* de a en G como el conjunto de elementos de G que fijan al elemento a, y se denota $G_a := \{g \in G | g \cdot a = a\}$.[†]

Es fácil ver que el estabilizador de cualquier elemento de G también es un subgrupo de G.

Definición 1.12. Consideremos la relación de equivalencia en un G-conjunto X definida por $x \sim x' \quad \Leftrightarrow g \cdot x = x'$ para algún $g \in G$. Entonces X se particiona en clases de equivalencia, que serán llamadas *órbitas*, y se denotarán por O_x, donde x será un representante de la clase.

Estas últimas pueden interpretarse como los posibles resultados que tiene la acción de G sobre x. Otra definición de la órbita de un elemento x puede escribirse en forma de conjunto como $O_x = \{g \cdot x \mid g \in G\}$.

Definición 1.13. Dado un grupo G, se define el *anillo de Burnside* $\Omega(G)$ como el conjunto de diferencias formales de clases de isomorfismo de G-conjuntos finitos. Para la estructura de anillo, la adición está inducida por la unión disjunta de G-conjuntos y la multiplicación por el producto cartesiano.

Es importante notar que el anillo de Burnside para cualquier grupo G es un $\mathbb{Z}$-módulo libre y que sus generadores son clases de isomorfismo de órbitas de G. En otras palabras, todo

[†]Algunos autores llaman a este grupo el *grupo de isotropía*

elemento de $\Omega(G)$ es de la forma

$$\sum_{i=1}^{N} a_i G/G_i$$

donde cada $a_i \in \mathbb{Z}$ y los G_i son representantes de las clases de conjugación de los subgrupos de G.

Para la siguiente definición, primero consideremos un grupo G, y denotemos por $[s_G]$ a un conjunto de representantes de cada clase de conjugación de subgrupos de G. Otorgándole un orden total $\preceq$ a $[s_G]$ mediante $H \preceq K$ si $|H| \leq |K|$, podemos reordenar $[s_G]$ como $\{H_1, \ldots, H_n\}$ donde H_1 es el grupo trivial y $H_n = G$.

Definición 1.14. Dado un grupo G se define entonces su *tabla de marcas* como la matriz cuadrada M de tamaño n donde la entrada $M(i,j)$ es $|(G/H_i)^{H_j}|$.

$$M(G) = \begin{bmatrix} |(G/H_1)^{H_1}| & |(G/H_1)^{H_2}| & \ldots & |(G/H_1)^{H_n}| \\ |(G/H_2)^{H_1}| & |(G/H_2)^{H_2}| & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ |(G/H_n)^{H_1}| & \ldots & \ldots & |(G/H_n)^{H_n}| \end{bmatrix}$$

Dado que para $i < j$, se tiene que $|H_i| < |H_j|$, entonces no pueden existir elementos de G/H_i que queden fijos por H_j, por tanto las entradas (i,j) con $i < j$ serán cero. Por otra parte, la columna izquierda de la tabla de marcas siempre es el orden del cociente correspondiente pues el grupo de orden 1 actúa trivialmente. Todas las entradas de la última fila siempre son 1 por ser $|G/H_n| = 1$ y la diagonal de $M(G)$ siempre será $[N_G(H_i) : H_i] \geq 1$. En particular la matriz es triangular inferior. Y dado que todas las entradas de la diagonal de $M(G)$ son distintas de cero, la matrix $M(G)$ es invertible.

El siguiente teorema será de utilidad para el tercer capítulo, por tanto será importante no olvidarlo.

Teorema 1.15. ***(Burnside)*** *Sea G un grupo finito y X e Y G-conjuntos finitos, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- *Los G-conjuntos X,Y son isomorfos como G-conjuntos.*
- *Para cualquier subgrupo $H \leq G$, los conjuntos X^H e Y^H tienen la misma cardinalidad.*

Prueba. La implicación del primer punto al segundo es trivial puesto que al ser isomorfos como G-conjuntos, induce una biyección entre los conjuntos X^H e Y^H. Denotemos nuevamente $[s_G]$ a un conjunto de representantes de cada clase de conjugación de subgrupos de G. Para obtener la otra implicación, recordemos que todo conjunto de A puede verse de forma única como una unión disjunta de sus órbitas como

$$A = \coprod_{K \in [s_G]} A_K(G/K)$$

Donde cada $A_K \in \mathbb{N}$ y cada $A_K(G/K)$ es una unión disjunta de A_K copias de G/K. La unicidad de la forma de A implica la unicidad de los coeficientes A_K. Es claro que si la afirmación es cierta, la ecuación

$$\bigoplus_{K \in [s_G]} (X_K - Y_K)|(G/K)^H| = 0$$

tendrá una solución. Reescrito de otra forma, equivale a afirmar que la ecuación $M(G)x = 0$ tiene una solución no trivial, pero esto sólo ocurre si todas las entradas son cero, pues $M(G)$ es invertible. Por tanto para cada K, se tendrá que $X_K = Y_K$, implicando que X y Y tienen la misma descomposición en órbitas, implicando que sean isomorfos como G-conjuntos.

□

Para el capítulo de sistemas de representación de fusión se considerarán acciones lineales de grupos sobre espacios vectoriales, por lo que los siguientes resultados tendrán esta dirección.

A partir de este punto denotaremos por el grupo de transformaciones lineales del espacio vectorial V por $GL(V)$.

Teorema 1.16. *Dado un grupo G, un espacio vectorial V y homomorfismo $\rho\colon G \to GL(V)$, los puntos fijos de la acción de $\rho(G)$ en V forman un subespacio vectorial de V.*

Prueba. Denotemos por V^G al conjunto de puntos fijos. Como cualquier matriz que multiplique al vector 0 nuevamente dará por resultado 0, en particular se tendrá que $\rho(g) \cdot 0 = 0$. En consecuencia $0 \in V^G$.

Por otro lado, si $x, y \in V^G$, al ser $\rho(g)$ un elemento en $GL(V)$, es una transformación lineal, por tanto se cumplirá que

$$\rho(g) \cdot (x + y) = \rho(g) \cdot x + \rho(g) \cdot y = x + y$$

para todo $g \in G$. Igual se cumplirá que si $x \in V^G$ y k es un escalar,

$$\rho(g) \cdot (kx) = k(\rho(g) \cdot (x)) = kx$$

por ser una transformación lineal. Por tanto V^G es un subespacio vectorial de V.

$\square$

Por otra parte, la pieza clave para desarrollar cualquier sistema (de fusión, de acción de fusión o de representación de fusión) es la base a partir de la que se obtienen los objetos de la categoría, que es un p-grupo.

Definición 1.17. Un grupo G es un *p-grupo* si para todo elemento de G, su orden es una potencia de p. Si un subgrupo $H \leq G$ cumple ésto, entonces se le llama un p-subgrupo de G.

Otra forma de definir un p-grupo es un grupo cuyo orden es una potencia de p.

Definición 1.18. Dado un grupo G y un p-subgrupo H de G, se dice que H es un *p-subgrupo de Sylow* si H no está contenido propiamente en algún otro p-subgrupo de G. Para abreviar la notación, se suele decir también que es un p-Sylow de G.

Por la definición 1.18, ya es posible entrar plenamente a la exposición de los teoremas de Sylow:

Teorema 1.19. *Dado un grupo G de orden $p^\alpha k$ con $mcd(k,p) = 1$ y p primo, se tiene que G contiene un subgrupo de orden p^i para cada $1 \leq i \leq \alpha$, y cada subgrupo de G de orden p^i es normal en algún subgrupo de orden p^{i+1}. Como consecuencia, dado $H \leq G$, H es un p-Sylow si y sólo si $|H| = p^\alpha$. En particular, todo p-subgrupo está contenido en un p-Sylow.*

Ejemplo 1.20. En el caso del grupo diédrico $D_{10} = \langle \sigma, \tau | \sigma^5 = \tau^2 = 1, \tau\sigma = \sigma^{-1}\tau \rangle$, el subgrupo generado por σ, es el 5-Sylow de D_{10} mientras que $\langle \tau \rangle$ es un 2-Sylow.

Ejemplo 1.21. En el grupo $S_3 \times S_3$, con $S_3 = \langle \sigma, \tau | \sigma^3 = \tau^2 = 1, \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1} \rangle$ el grupo de permutaciones de tres elementos, su $3-$Sylow es el grupo $\langle (\sigma, 1), (1, \sigma) \rangle \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, el cual es de orden 9.

La pieza que más será usada del teorema 1.19 es la última línea del mismo, pues el hecho de que todo p-subgrupo esté contenido en un p-Sylow será una herramienta muy útil para los teoremas relativos a sistemas (de fusión, de acción de fusión y de representación de fusión).

Teorema 1.22. *Dados dos p-subgrupos de Sylow H, K de un grupo finito G, $H = gKg^{-1}$ para algún $g \in G$.*

Ejemplo 1.23. Si consideramos nuevamente el grupo de permutaciones de tres elementos S_3, podemos ver que los 2-grupos de Sylow de S_3 son generados por sus elementos de orden 2 y que son conjugados los tres entre ellos:

$$(1,2) = (1,3)(2,3)(1,3) = (2,3)(1,3)(2,3).$$

Esencialmente, entre los teoremas de Sylow las herramientas más importantes son el hecho de que si H, K son subgrupos de Sylow de G finito, H será conjugado con K por algún elemento de G; también el hecho de que tener un p-subgrupo $P \leq G$ finito, será posible construir una cadena de p-subgrupos en G con orden mayor que $|P|$ (concretamente p veces mayor) hasta encontrar un p-subgrupo de Sylow que lo contenga.

1.2 Teoría de categorías

La teoría desarrollada en esta sección es obtenida a partir de [1], [8] y [17].

Definición 1.24. Una *categoría* $\mathscr{C}$ consiste de:

- Una clase $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ de objetos,
- para cada par ordenado de objetos, un conjunto $\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A, B)$ cuyos elementos son llamados *morfismos*, con dominio A y codominio B,
- y para cada terna de objetos (A, B, C), una función llamada *composición* $(f, g) \to gf$ del conjunto producto $\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A, B) \times \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(B, C)$ en $\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A, C)$ tal que las siguientes condiciones se cumplen:
  - Si $(A, B) \neq (C, D)$, entonces $\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A, B)$ y $\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(C, D)$ son disjuntos.
  - Si $f \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A, B)$, $g \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(B, C)$ y $h \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(C, D)$, entonces $h(gf) = (hg)f$, es decir, se cumple la asociatividad†.
  - Para cada objeto A existe un elemento $1_A \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A, A)$ tal que $f1_A = f$ para todo $f \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A, B)$, y $1_A g = g$ para todo $g \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(B, A)$.

En términos más simples, una categoría puede representarse por puntos que representen a los objetos, y flechas representando a los morfismos entre éstos.

†Por ello, el producto $h(gf)$ se denota por hgf suprimiendo así los paréntesis.

Ejemplo 1.25. Una categoría sencilla puede ser dada por:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop left, "1_A"] \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"] & & B \arrow[loop right, "1_B"] \arrow[dl, "\beta"] \\ & C \arrow[loop below, "1_C"] & \end{tikzcd}$$

donde la composición de morfismos está descrita de la siguiente manera: cuando se compone un morfismo con la identidad, da el mismo morfismo, y $\beta \circ \alpha = \gamma$, dejando así todas las posibles composiciones.

Ejemplos más complejos de una categoría:

- La categoría de los grupos, denotada **Grp**, donde los objetos son los grupos, los morfismos son los homomorfismos entre grupos, y la composición es la usual de homomorfismos de grupos.
- La categoría de los anillos, denotada **Ring**, donde los objetos son los anillos, los morfismos los homomorfismos entre anillos y la composición es la usual de homomorfismos de anillos.
- La categoría de los espacios topológicos, denotada **Top**, donde los objetos son espacios topológicos, los morfismos son funciones continuas entre espacios, y la composición es la usual entre funciones continuas.

Por otra parte, existen “funciones” que relacionan categorías entre sí, llamadas *funtores*, como las estudiadas en teoría de Galois, entre la categoría formada por los campos intermedios entre un campo base y su extensión de Galois y los subgrupos del grupo de Galois de la extensión del campo; o bien la estudiada en topología algebraica, el funtor π_1 del grupo fundamental entre la categoría de espacios topológicos punteados $\mathbf{Top}_*$ y **Grp**.

Definición 1.26. Una categoría $\mathscr{C}$ se dice que es *pequeña* si $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ es un conjunto.

El concepto de categoría pequeña puede causar cierta confusión al lector al necesariamente considerar los objetos de la categoría como un conjunto. El motivo de esto es que pueden también formar una clase, y por tanto no ser categorías pequeñas.

Ejemplo 1.27. La categoría **Set** no es una categoría pequeña, pues para definir la clase de objetos como conjunto, se requeriría que un conjunto contenga a todos los conjuntos, pero por tanto el conjunto de objetos se contiene a sí mismo, y esto no es posible por los axiomas de Zermelo-Fraenkel (en específico, el axioma de especificación).

Ejemplo 1.28. La categoría del ejemplo 1.25 es una categoría pequeña. Sus objetos son el conjunto $\{A, B, C\}$, por tanto cumple la condición.

Definición 1.29. Si $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ son categorías, un *funtor covariante* F de $\mathscr{C}$ a $\mathscr{D}$ consiste de:

- Una asignación de un objeto $F(A)$ en $\mathrm{Ob}(\mathscr{D})$ por cada objeto A de $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$.
- Para todo par de objetos A, B de $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, una función

$$\begin{aligned} F\colon \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A, B) &\longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathscr{D}}(F(A), F(B)) \\ f &\mapsto F(f) \end{aligned}$$

Y es requerimiento que se cumplan las siguientes condiciones:

- Si gf es un morfismo definido en la categoría $\mathscr{C}$, entonces $F(gf) = F(g)F(f)$.
- $F(1_A) = 1_{F(A)}$ para todo objeto A de la categoría $\mathscr{C}$.

Ejemplo 1.30. El funtor *olvidadizo* $f\colon \mathbf{Ring} \to \mathbf{Ab}$, dado por $f((R, +, \cdot)) = (R, +)$. Si $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(A, B)$, se tendrá que $f(h)$ es la misma función h que es un homomorfismo de grupos. Con la afirmación anterior, es claro que $f(1_A) = 1_{f(A)}$ para todo A en $\mathrm{Ob}(\mathbf{Ring})$.

Definición 1.31. Si $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ son categorías, un *funtor contravariante* F de $\mathscr{C}$ a $\mathscr{D}$ consiste de:

- Una asignación de un objeto $F(A)$ en $\mathrm{Ob}(\mathscr{D})$ por cada objeto A de $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$.
- Para todo par de objetos A, B de $\mathscr{C}$, una función

$$F\colon \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A,B) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathscr{D}}(F(B),F(A))$$
$$f \mapsto F(f)$$

Y es requerimiento que se cumplan las siguientes condiciones:

- Si gf es un morfismo definido en la categoría $\mathscr{C}$, entonces $F(gf) = F(f)F(g)$.
- $F(1_A) = 1_{F(A)}$ para todo objeto A de la categoría $\mathscr{C}$.

Ejemplo 1.32. El concepto de funtor contravariante se puede ver entre los subcampos de una extensión de campo finita y los subgrupos del grupo de Galois de la extensión.

Definición 1.33. Dados dos funtores F, G de $\mathscr{C}$ a $\mathscr{D}$, se define una *tranformación natural* η de F a G como una función que asigna a cada objeto A en $\mathscr{C}$ un morfismo $\eta_A \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{D}}(FA, GA)$ tal que para cualesquiera objetos A, B en $\mathscr{C}$ y cualquier $f \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A,B)$, el siguiente rectángulo sea conmutativo:

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\eta_B"] & G(B) \end{tikzcd}$$

Si cada η_i es un isomorfismo, entonces se dice que η es un isomorfismo natural.

Ejemplo 1.34. La transformación natural identidad id_F entre el funtor F y él mismo, dejando el diagrama claramente conmutativo

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\mathrm{id}_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & F(A) \arrow[d, "F(f)"] \\
F(B) \arrow[r, "\mathrm{id}_B"] & F(B)
\end{tikzcd}$$

es el caso más trivial de una transformación natural.

Definición 1.35. Sea $\mathscr{C}$ una categoría pequeña, $\mathscr{D}$ una categoría y $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtor. Se dice que un objeto d de $\mathscr{D}$ es un *límite inverso* de F si para cada objeto $c \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ existe un morfismo $i_c : d \to F(c)$ tal que si $c_1, c_2 \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ y $f : c_1 \to c_2$ es un morfismo en $\mathscr{C}$, entonces $i_{c_2} = F(f) \circ i_{c_1}$ y es universal respecto a esta propiedad, es decir, para cualquier par $(K, \{\rho_x\})$ donde $\rho_x \colon K \longrightarrow F(x)$ son tales que $\rho_{c_2} = F(f) \circ \rho_{c_1}$ para todo morfismo $f \colon c_1 \longrightarrow c_2$ en $\mathscr{C}$, existe un único homomorfismo $\theta \colon K \longrightarrow d$ tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[dr, dashed, "\theta"] \arrow[drr, bend left, "\rho_{c_1}"] \arrow[ddr, bend right, "\rho_{c_2}"'] & & \\
& d \arrow[r, "i_{c_1}"] \arrow[d, "i_{c_2}"] & F(c_1) \arrow[dl, "F(f)"] \\
& F(c_2) &
\end{tikzcd}$$

Si existe esta d, suele denotarse por $\varprojlim_{\mathscr{C}} F$ o $\varprojlim_{m \in \mathscr{C}} F(m)$.

Por la definición podemos deducir que si existe $\varprojlim_{\mathscr{C}} F$ entonces es único salvo isomorfismo en $\mathscr{D}$.

Ejemplo 1.36. Sea $\mathscr{T}$ la categoría dada por los objetos $\mathrm{Ob}(\mathscr{T}) = \{u, v\}$, con los morfismos identidad 1_u y 1_v y un morfismo $g \colon u \to v$, y sea $F \colon \mathscr{T} \to \mathbf{Ab}$ un funtor de $\mathscr{T}$ a $\mathbf{Ab}$ tal que $F(u) = \mathbb{Z}_4$, $\mathcal{F}(v) = \mathbb{Z}_2$, $F(1_u) = 1_{\mathbb{Z}_4}$, $F(1_v) = 1_{\mathbb{Z}_2}$ y $F(g)$ el residuo módulo 2 a los elementos de $\mathbb{Z}_4$. Entonces $\varprojlim_{\mathscr{T}} F = \mathbb{Z}_4$ y los morfismos $i_{\mathbb{Z}_2}$, $i_{\mathbb{Z}_4}$ serán el residuo módulo 2 a los elementos de $\mathbb{Z}_4$ y la identidad de $\mathbb{Z}_4$ respectivamente. Claramente este límite inverso cumplirá la condición de universalidad para ambos grupos.

$$
\begin{tikzcd}
K \arrow[dr, dashed, "\theta"] \arrow[drr, bend left, "\rho_{\mathbb{Z}_4}"] \arrow[ddr, bend right, "\rho_{\mathbb{Z}_2}"'] & & \\
& \mathbb{Z}_4 \arrow[r, "id_{\mathbb{Z}_4}"] \arrow[d, "\equiv_2"] & \mathbb{Z}_4 \arrow[dl, "\equiv_2"] \\
& \mathbb{Z}_2 &
\end{tikzcd}
$$

1.3 Álgebra homológica

La teoría en esta sección se basa en su totalidad en [5], [6] y [8].

La siguiente sección contiene las herramientas necesarias para entender las bases de la conjetura de Martino-Priddy, además de ser herramientas para los resultados a exponer en capítulos posteriores sobre sistemas de acción de fusión.

Definición 1.37. Dado un anillo conmutativo con unidad R, se define como un *R-módulo* a un grupo abeliano M donde R actúe linealmente, esto es, se cumplen los siguientes axiomas para cualesquiera $a, b \in R$ y para cualesquiera $x, y \in M$:

- $a(x + y) = ax + ay$.
- $(a + b)x = ax + bx$.
- $(ab)x = a(bx)$.
- $1 \cdot x = x$.

Ejemplo 1.38. Todo grupo G abeliano es un $\mathbb{Z}$-módulo. Si vemos a un elemento $n \cdot x$ con $n \in \mathbb{Z}$ y $x \in G$, entonces

- $n \cdot x = x + x + \ldots x$ sumado n veces si $n > 0$,
- $n \cdot x = -x - x - \cdots - x$ n veces si $n < 0$ y
- $n \cdot x = 0$ si $n = 0$.

Definición 1.39. Se define un *R-módulo graduado* como una sucesión

$$C = (C_n)_{n \in \mathbb{Z}}$$

de R-módulos. Si $x \in C_n$, se dice que x tiene grado n, y se escribe $\deg(x) = n$.

Definición 1.40. Una *función de grado p* de un R-módulo graduado C a un R-módulo graduado C' es una familia $f = (f_n \colon C_n \to C'_{n+p})_{n \in \mathbb{Z}}$ de homomorfismos de R-módulos.

Nótese que $\deg(f(x))$=$\deg(x)$+p.

Definición 1.41. Se define un *complejo de cadena* sobre R como un par (C, d) donde C es un R-módulo graduado y $d \colon C \to C$ es una función de grado -1 tal que $d_k d_{k+1} = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. A la función d se le llama *diferencial* u *operador borde* de C.

Definición 1.42. Se definen por ciclos de grado n a los elementos en $\ker d_n$, por bordes de grado n a los elementos en Im d_{n+1} y se denotan por $Z_n(C)$ y $B_n(C)$ a $\ker d_n$ y $\operatorname{Im} d_{n+1}$ respectivamente. Se define la *homología de C de grado n* a $H_n(C) = Z_n(C)/B_n(C)$. Todos ellos son módulos graduados.

Si se considera un diferencial d de grado +1 en vez de -1, ponemos el índice del complejo de cadena como $C = (C^n)_{n \in \mathbb{Z}}$, y la familia d también, dejando así $d = (d^n \colon C^n \to C^{n+1})$, se llama al par (C, d) un complejo de cocadena. Un complejo de cocadena puede verse como un complejo de cadena considerando $C_n = C^{-n}$; de la misma forma, los elementos $\ker d^n$ e $\operatorname{Im} d^{n-1}$ de un complejo de cocadena son llamados cociclos, y cobordes y denotamos por $Z^n(C)$ y $B^n(C)$ a los conjuntos $\ker d^n$ e $\operatorname{Im} d^{n-1}$ respectivamente. También definimos $H^n(C) = Z^n(C)/B^n(C)$, los grupos de cohomología de C.

Definición 1.43. Si (C, d) y (C', d') son complejos de cadena, se define una *función de cadena* de C a C' como un homomorfismo de R-módulos graduados $f\colon C \to C'$ de grado 0 tal que $d'_n f_n = f_{n-1} d_n$ para todo n. Usando un diagrama conmutativo, se puede ver como:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C_{n-2} \arrow[r, "d_{n-2}"] \arrow[d, "f_{n-2}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "d'_{n+1}"] & C'_n \arrow[r, "d'_n"] & C'_{n-1} \arrow[r, "d'_{n-1}"] & C'_{n-2} \arrow[r, "d'_{n-2}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

La propiedad $d'_n f_n = f_{n-1} d_n$ hace que cada diagrama por separado conmute.

Definición 1.44. Una *homotopía de una función de cadena* $f\colon C \longrightarrow C'$ *a una función de cadena* $g\colon C \longrightarrow C'$ es un homomorfismo de módulos graduados $h\colon C \to C'$ de grado 1 tal que

$$d'_n h_n + h_{n-1} d_{n-1} = f_{n-1} - g_{n-1}$$

Se denota por $f \simeq g$ y se dice que f es homótopo a g si existe una homotopía como la mencionada.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d_{n+1}"] & C^n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n - g_n"] \arrow[dl, "h_{n+1}"] & C^{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1} - g_{n-1}"] \arrow[dl, "h_n"] & C^{n-2} \arrow[r, "d_{n-2}"] \arrow[d, "f_{n-2} - g_{n-2}"] \arrow[dl, "h_{n-1}"] & \cdots \arrow[dl, "h_{n-2}"] \\
\cdots \arrow[r, "d'_{n+1}"] & C'^n \arrow[r, "d'_n"] & C'^{n-1} \arrow[r, "d'_{n-1}"] & C'^{n-2} \arrow[r, "d'_{n-2}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Si vemos el diagrama anterior, la condición $d'^n h_n + h_{n-1} d^{n-1} = f_{n-1} - g_{n-1}$ hace que cada paralelogramo $C_{n-1}C_{n-2}C'_{n-1}C'_n$ se vaya aproximando a ser una línea.

Definición 1.45. Una función de cadena $f\colon C \to C'$ es llamada una *equivalencia homotópica* si existe una función de cadena $f'\colon C' \longrightarrow C$ tal que $f'f \simeq 1_C$ y $ff' \simeq 1_{C'}$. Se define como una equivalencia débil si $H(f)\colon H(C) \to H(C')$ es un isomorfismo.

Definición 1.46. Un complejo de cadena se dice *contráctil* si es homotópicamente equivalente al complejo cero, o equivalentemente, si $1_C \simeq 0$. Una homotopía de 1_C a 0 es llamada una nulhomotopía.

Definición 1.47. Una *sucesión exacta* es una sucesión finita o infinita de objetos $(C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ y morfismos $\varphi_n\colon C_n \to C_{n-1}$ entre ellos tales que la imagen de φ_n es el núcleo de φ_{n-1}.

$$\cdots \longrightarrow C_{n-1} \xrightarrow{\varphi_n} C_n \xrightarrow{\varphi_{n+1}} C_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

El caso que aparecerá con mayor frecuencia y por tanto que nos interesará de entre las sucesiones exactas son las *sucesiones exactas cortas.*

Definición 1.48. Una *sucesión exacta corta* está dado por dos homomorfismos $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ tales que la imagen de f es el kernel de g, f es inyectiva y g es sobreyectiva. Es decir, la sucesión

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

es exacta.

Ejemplo 1.49. El caso donde B es un grupo cualquiera, $A \trianglelefteq B$, y $C = B/A$ siempre genera una sucesión exacta corta. Los morfismos f y g serían la inclusión de A en B y la proyección en el grupo cociente de B a C respectivamente.

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{q} B/A \longrightarrow 0$$

Claramente se cumple que $\mathrm{Im}(i) = A$, y que $\mathrm{Ker}(q) = A$, por lo que $\mathrm{Im}(i) = \mathrm{Ker}(q)$.

Ejemplo 1.50. Dados A, C grupos cualesquiera y $B = A \oplus C$. Los morfismos f y g serían la inclusión de A en B y la función que manda todo elemento de A a e_C y todo elemento de C a sí mismo en C.

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} A \oplus C \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

Claramente se cumple que $\mathrm{Im}(i) = A$, y por como fue definido g, $\mathrm{Ker}(g) = A$, por lo que $\mathrm{Im}(i) = \mathrm{Ker}(q)$.

Definición 1.51. Una *resolución de un R-módulo M* es un complejo

$$\cdots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \longrightarrow 0$$

de R-módulos junto con un morfismo de R-módulos $\varphi\colon F_0 \longrightarrow M$ tal que

$$\cdots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0$$

es exacta. Si cada F_i es libre, se dice que es una *resolución libre*. Si la resolución cumple que $F_i = 0$ para $i > n$, decimos que la resolución tiene longitud $\leq n$. En este caso, reescribimos la resolución simplemente como:

$$0 \xrightarrow{\partial_{n+1}} F_n \xrightarrow{\partial_n} \cdots \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\partial_0} M \longrightarrow 0$$

para dar a entender que la sucesión tiene un fin.

Definición 1.52. Si G es un grupo y R es un anillo conmutativo con unidad, podemos formar el *anillo de grupo RG*, también denotado $R[G]$, cuyos elementos son las combinaciones lineales formales $\sum\limits_i r_i g_i$ con $r_i \in R$ y $g_i \in G$ donde todos los r_i son cero salvo un número finito. La adición y la multiplicación se dan por las operaciones

$$\sum_i r_i g_i + \sum_i r'_i g_i = \sum_i (r_i + r'_i) g_i \qquad \sum_i r_i g_i \cdot \sum_j r_j g_j = \sum_{i,j} (r_i r_j) g_i g_j$$

Definición 1.53. En la definición anterior, para el caso cuando $R = \mathbb{Z}$, se define $\mathbb{Z}G$ (o $\mathbb{Z}[G]$) como el *anillo de grupo integral* de G.

Notemos que G es un subgrupo del grupo $(\mathbb{Z}[G])^*$ de unidades de $\mathbb{Z}[G]$ y que satisface la siguiente *propiedad universal*:

Lema 1.54. Dado un anillo R y un homomorfismo de grupos $f : G \to R^*$, existe una única extensión de f a un homomorfismo de anillos $\mathbb{Z}[G] \to R$, por lo que tenemos una *adjunción*:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(\mathbb{Z}G, R) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}(G, R^*)$$

Un $\mathbb{Z}[G]$-módulo también se puede describir como un grupo abeliano A junto con un homomorfismo de $\mathbb{Z}[G]$ al anillo de endomorfismos de A. En vista de la biyección mencionada anteriormente un homomorfismo de anillos corresponde a un homomorfismo de grupos de G a su grupo de automorfismos de A. Por esta razón también se les llama G-módulos.

1.4 Topología algebraica

Todo lo visto en esta sección puede leerse a mayor profundidad en [5] y [14].

Los espacios que aparecen cuando se estudian los sistemas de fusión y sus realizaciones geométricas son espacios denominados CW-complejos y Δ-complejos, por lo que la siguiente sección considerará a cualquier espacio mencionado como uno de éstos.

Definición 1.55. Un CW-complejo es un espacio topológico Z que es homeomorfo a un espacio X construido de la siguiente manera

- Se comienza con un conjunto discreto de puntos X^0, las 0-celdas de X.
- Inductivamente se forma el n-esqueleto X^n a partir de X^{n-1} adjuntando n-celdas e^n_α vía funciones continuas $\varphi_\alpha\colon S^{n-1} \longrightarrow X^{n-1}$ (esto significa que X^n es el espacio cociente

de la unión disjunta $X^{n-1}\coprod_\alpha D^n_\alpha$ de X^{n-1} y una colección de n-discos D^n_α bajo la identificación $x\sim\varphi_\alpha(x)$ para $x\in\partial D^n_\alpha$ donde ∂D^n_α es la frontera de D^n_α).

- $X=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}X^n$ con la topología débil†.

En esta tesis una n-celda es un espacio homeomorfo a un disco cerrado de dimensión n, denotado D^n.

Ejemplo 1.56. La esfera S^n es un CW-complejo compuesto de un punto e_0 (una 0-celda) y una n-celda e_n. Se construye adjuntando mediante la función constante $\partial D^n\longrightarrow *$. Esto equivale a decir que $S^n\cong D^n/\partial D^n$.

Ejemplo 1.57. El espacio real proyectivo $\mathbb{R}P^2$ se obtiene a partir de una 0-celda, una 1-celda y una 2-celda. A través de la función $c\colon\partial e^1=\partial D^1\longrightarrow *$ los extremos de D^1 con la 0-celda para formar $X^{(1)}=S^1$. Y considerando la función $\varphi\colon\partial e^2=\partial D^2\longrightarrow S^1$ dada por $\varphi(z)=z^2$ (considerando a $S^1=\{e^{2i\pi}\mid 0\leq i\leq 1\}$) obtenemos $X^{(2)}=\mathbb{R}P^2$. A partir de este punto se dejarían de adjuntar n-celdas de grados mayores.

Definición 1.58. Un *espacio recubridor* de un espacio X consiste de un espacio $\tilde{X}$ y una función continua $p\colon\tilde{X}\longrightarrow X$ tal que cada punto $x\in X$ tiene una vecindad abierta U_x tal que $p^{-1}(U_x)$ es una unión disjunta de conjuntos V_i abiertos tales que cada uno sea homeomorfo a U_x por medio de p, es decir, $p|_{V_i}\colon V_i\longrightarrow U_x$ es un homeomorfismo.

Definición 1.59. Un espacio X es *simplemente conexo* si es arcoconexo y su grupo fundamental es trivial.

Otra forma de definir un espacio X simplemente conexo es un espacio tal que tiene una única clase de homotopía de caminos conectando cualesquiera dos puntos en X.

---

†Un subconjunto $U\subseteq X$ es cerrado si y sólo si $U\cap X^{(i)}$ es cerrado en cada $X^{(i)}\subseteq X$.

Definición 1.60. Dado un espacio X, un espacio recubridor de X simplemente conexo se conoce como un *espacio recubridor universal* de X. Salvo homeomorfismo puede ser llamado *el* espacio recubridor universal de X.

Ejemplo 1.61. Dado S^1, su espacio recubridor universal es $\mathbb{R}$.

Una cuestión importante es que de todo CW-complejo se puede obtener un complejo de cadena celular a partir de sus n-celdas, definiendo un $C_n^{CW}(X) = \bigoplus_{k\in I} \mathbb{Z}e_k^n$, es decir, el grupo libre con base las n-celdas de X. Los homomorfismos entre éstos serían los inducidos por las funciones de adjunción en cierto sentido[†].

$$\ldots \longrightarrow C_n^{CW}(X) \longrightarrow \ldots \longrightarrow C_1^{CW}(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0^{CW}(X) \longrightarrow 0$$

Por ejemplo, para $\mathbb{R}P^2$, el complejo de cadena tendría la forma:

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}e_2 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}e_1 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}e_0 \longrightarrow 0$$

Y a partir de este complejo podemos obtener la homología de los CW-complejos.

Una manera de generar G-módulos es linealizando las acciones de permutaciones. Más precisamente, si X es un G-conjunto, entonces se puede formar el grupo libre abeliano $\mathbb{Z}[X]$ generado por X, y uno extiende la acción de G en X a una acción $\mathbb{Z}$-lineal de G en $\mathbb{Z}[X]$. El módulo resultante es llamado un *módulo de permutación*.

La operación de unión disjunta en la categoría de G-conjuntos corresponde a la operación de suma directa en la categoría de G-**Mod** (G-módulos):

$$\mathbb{Z}\left[\amalg X_i\right] \cong \oplus \mathbb{Z}[X_i].$$

De lo anterior se sigue que cada módulo de permutación $\mathbb{Z}[X]$ admite una descomposición

$$\mathbb{Z}\left[X\right] \cong \oplus \mathbb{Z}[G/G_x]$$

[†][14], p.101

donde cada x es un representante para su G-órbita en X y G_x es el estabilizador de x.

Si X es un G-conjunto libre, entonces $G/G_x = G$, y se tiene el siguiente resultado:

Lema 1.62. Sea X un G-conjunto libre y sea E un conjunto de representantes para las G-órbitas en X. Entonces $\mathbb{Z}[X]$ es un $\mathbb{Z}[G]$-módulo libre con base E.

Definición 1.63. Un *G-complejo* es un CW-complejo X junto con una acción de G en X que permuta las celdas.

Esto quiere decir que el homeomorfismo $x \mapsto gx$ de X envía una n-celda a una n-celda (no necesariamente distinta).

Si X es un G-complejo, entonces la acción de G en X induce una acción de G en el complejo de cadena celular $C_*^{CW}(X)$, el cual se convierte en un complejo de cadena de G-módulos. Más aún, la aumentación canónica $\varepsilon : C_0^{CW}(X) \to \mathbb{Z}$ (definido por $\varepsilon(v) = 1$ para toda 0-celda v de X) es una función de G-módulos si se le da la acción trivial de G a $\mathbb{Z}$.

Se dice que X es un *G-complejo libre* si permuta libremente las celdas de X. En este caso, por el lema 1.62, cada $C_n(X)$ tiene una $\mathbb{Z}$-base, que es permutada libremente por G, y por lo tanto es un $\mathbb{Z}[G]$-módulo libre con un elemento base para cada G-órbita de celdas.

Por otra parte, si X es contráctil, entonces $H_*(X) \cong H_*(*)$; en otras palabras, la secuencia

$$\cdots \longrightarrow C_n(X) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

es exacta, lo que implica:

Lema 1.64. Dado un G-complejo libre contráctil X, entonces el complejo de cadena celular de X es una resolución libre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}[G]$.

Definición 1.65. Se define un *complejo Eilenberg-MacLane* de tipo $(G,1)$ o simplemente un $K(G,1)$ como un CW-complejo Y que cumple las siguientes condiciones:

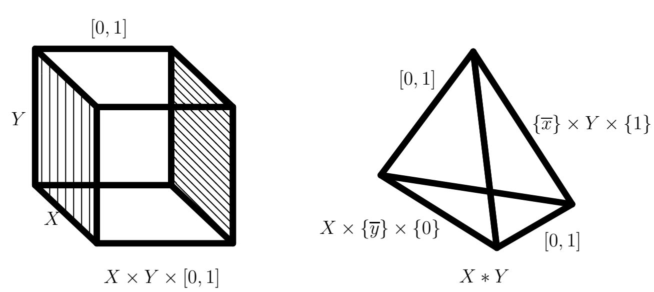
- Y es conexo,
- $\pi_1(Y) = G$ y
- la cubierta universal de Y es contráctil.

1.5 La construcción de Milnor y el transfer

La construcción de los espacios clasificantes fue explicada inicialmente por John Milnor en 1956, donde define una manera de unir espacios la cual usaría para la creación de espacios clasificantes de grupos, los cuales posteriormente serían de utilidad para obtener grupos de homología.

Definición 1.66. Se define el *join* de dos espacios topológicos X, Y como el cociente $X \times Y \times [0,1]/\sim$ donde $(x, y, 0) \sim (x', y, 0)$ para cualesquiera $x, x' \in X$ y también $(x, y, 0) \sim (x, y', 0)$ para cualesquiera $y, y' \in Y$. Se denota $X * Y$.

Gráficamente podemos interpretar al espacio original $X \times Y$ como el espacio de la izquierda, y el espacio $X * Y$ como el espacio de la derecha.



Definición 1.67. Un grupo topológico G es un grupo que es a la vez un espacio topológico T_1, tal que $\varphi\colon G \times G \longrightarrow G$ dada por $\varphi(g_1, g_2) = g_1 g_2$ y la función $f\colon G \longrightarrow G$ que envía x a x^{-1} son funciones continuas.

Ejemplo 1.68. El grupo $\mathbb{R}$ con la operación aditiva es un grupo topológico.

Ejemplo 1.69. Todo grupo G con la topología discreta es un grupo topológico. Darle la topología discreta a los grupos discretos es debido a que no es posible definir un sentido de cercanía entre sus puntos.

Definición 1.70. Sea B un espacio topológico. Sea P un G-espacio derecho equipado con una G-función continua $\pi\colon P \longrightarrow B$ donde G actúa trivialmente sobre B. Decimos que (P, π) es un G-haz principal sobre B si π cumple la condición de trivialidad local, es decir, cumple que B tiene una cubierta abierta $\{U\}$ tal que existe un homeomorfismo G-equivariante $\varphi_U\colon \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} & U_\alpha & \\ \pi^{-1}(U) \arrow[ur, "\pi"] \arrow[rr, "\varphi_U"] & & U \times G \arrow[ul, "\pi_1"'] \end{tikzcd}$$

donde π_1 es la proyección sobre la primera entrada de $U \times G$.

Dado un grupo topológico G, *el espacio total del G-haz principal universal de Milnor* para G es obtenido considerando el espacio join de n copias de G denotado $E_nG = \underbrace{G * G * \cdots * G}_{n\ veces}$. Los elementos de E_nG son sumas formales $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i g_i$ donde $\lambda_i \in [0,1]$ y $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$. Cada E_iG tiene una acción libre de G obtenida a partir de la acción de multiplicar los elementos de E_nG por la derecha $(\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i g_i)h = \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i (g_i h)$. Con la estructura descrita, es claro ver que cada

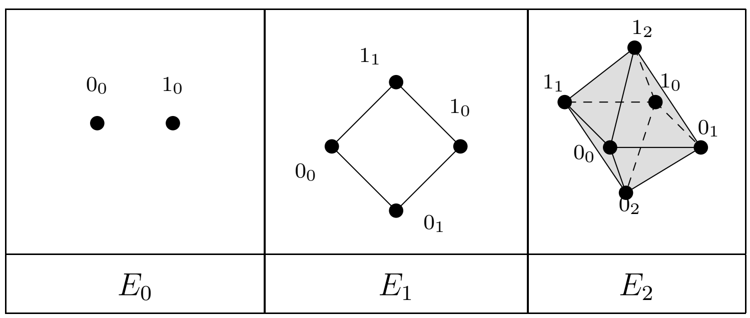
E_nG puede verse contenido en $E_{n+1}G$ bajo la asignación

$$\sum_{i=0}^{n}\lambda_i g_i \mapsto \sum_{i=0}^{n}\lambda_i g_i + 0\cdot 1.$$

Entonces $EG = \bigcup\limits_{n}^{\infty} E_nG$ como conjunto, y se le asigna la topología final, manteniendo una acción libre de G. El espacio clasificante de G es el espacio $BG := EG/G$, donde el cociente EG/G es el espacio de órbitas.

Ejemplo 1.71. El espacio clasificante de $\mathbb{Z}$ es S^1.

Ejemplo 1.72. El espacio clasificante de $\mathbb{Z}_2$ es $\mathbb{R}P^{\infty}$, el cual se construye utilizando el join de la siguiente manera: asignándole la topología discreta a $\mathbb{Z}_2$, en el espacio $E_n\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 * \cdots * \mathbb{Z}_2$, 0_i y 1_i determinarán el elemento 0 ó 1 de la i-ésima G:



Cada E_n será un espacio homeomorfo a S^n. La inclusión $\iota\colon E_i \hookrightarrow E_{i+1}$ es dada por la inclusión en el ecuador de cada uno de estos espacios, asignando $\iota(a_1g_1 \times a_2g_2 \times \cdots \times a_ig_i) = a_1g_1 \times a_2g_2 \times \cdots \times a_ig_i \times 0\cdot 1_{i+1}$. Así, se tiene otra forma de obtener el espacio $S^{\infty} = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} S^i$, el cual es un espacio contráctil. Utilizando la acción de $\mathbb{Z}_2$ en el espacio, obtenemos que es la acción antipodal sobre S^{∞} en cada una de las esferas de cada dimensión. Por lo tanto, el espacio obtenido de hacer el cociente de las órbitas es $\mathbb{R}P^{\infty}$. Luego $B\mathbb{Z}_2 = \mathbb{R}P^{\infty}$.

Una de las motivaciones de la conjetura de Martino-Priddy fue el teorema de Cartan-Eilenberg. Un papel del homomorfismo transfer es su aplicación para la demostración de este último teorema. Los resultados previos al teorema de Cartan Eilenberg precisan del uso de cohomología de grupos.

Debido a la amplitud de los tecnicismos para generar las construcciones de algunos conceptos, sólo explicaremos superficialmente su desarrollo, puesto que explicarlos en detalle ocuparía más espacio del que en esencia se quiere dar a esta sección, y el fin de la tesis es otro. Para entender en la totalidad del detalle los siguientes conceptos y resultados es posible leer ([8], p.798-818).

Definición 1.73. Si G es un grupo finito y A un G-módulo, se definirá por $C^0(G,A) = A$, y para $n \geq 1$ se definirá a $C^n(G,A)$ como el conjunto de funciones de G^n a A donde $G^n = G \times \cdots \times G$ (el producto de n copias de G). Los elementos de $C^n(G,A)$ son llamados n-cocadenas de G con valores en A.

Definición 1.74. Para $n \geq 0$, se define el n-ésimo homomorfismo coborde de $C^n(G,A)$ a $C^{n+1}(G,A)$ por

$$\begin{aligned} d^n(f)(g_1,\ldots,g_{n+1}) &= g_1 \cdot f(g_2,\ldots,g_{n+1}) \\ &+ \sum_{i=1}^{n}(-1)^i f(g_1,\ldots,g_{i-1},g_i g_{i+1},g_{i+2},\ldots,g_{n+1}) \\ &+ (-1)^{n+1} f(g_1,\ldots g_n) \end{aligned}$$

donde el producto $g_i g_{i+1}$ es el definido en G como grupo.

Definición 1.75. Se definen por:

- $Z^n(G,A) = \ker(d^n)$ para $n \geq 0$. Como en el caso de los Z^n, los elementos son denominados n-cociclos.
- $B^n(G,A) = \mathrm{Im}(d^{n-1})$ para $n \geq 1$ y $B^0(G,A) = 1$. Como en el caso de los B^n, los elementos son denominados n-cobordes.

Finalmente, el concepto de cohomología de un grupo.

Definición 1.76. Sea $n \geq 0$. Se definirá el n-ésimo grupo de cohomología de un grupo G

como el grupo cociente $Z^n(G,A)/B^n(G,A)$. Es llamado la n-ésima cohomología de G con coeficientes en A, y es denotada por $H^n(G,A)$.

Definición 1.77. Si H es un subgrupo de G y A es un H-módulo, definimos el G-módulo coinducido $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, A)$. Dicho de otra forma, $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, A)$ es el conjunto de homomorfismos f de $\mathbb{Z}G$ a A que satisfacen que $f(hx) = hf(x)$ para todo $x \in \mathbb{Z}G$ y $h \in H$. La acción de un elemento $g \in G$ en $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, A)$ se define como $g \cdot (f(x)) := f(xg)$.

Lema 1.78. (Shapiro) Para cualquier subgrupo $H \leq G$ y cualquier H-módulo A, se tiene que

$$H^n(G, \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, A)) \cong H^n(H, A)$$

para $n \geq 0$.

Para los siguientes conceptos, consideraremos G un grupo, $H \leq G$ un subgrupo de éste y A un G-módulo. Ambos se basan en que si A es un G-módulo y $H \leq G$ es un subgrupo de G, entonces es claro que A también es un H-módulo bajo la operación heredada.

Definición 1.79. Sea A un G-módulo y A' un G'-módulo. Los homomorfismos de grupos $\varphi\colon G \longrightarrow G'$ y $\psi\colon A \longrightarrow A'$ se dicen *compatibles* si ψ es un homomorfismo de G-módulos cuando A' se entiende como un G-módulo a través de φ, esto es, $\psi(\varphi(g)a) = g\psi(a)$ para todo $g \in G$ y $a \in A$.

Definición 1.80. El homomorfismo inclusión $\iota\colon H \longrightarrow G$ y el homomorfismo identidad $\mathrm{id}\colon A \longrightarrow A$ son homomorfismos compatibles. El homomorfismo inducido en cohomología es llamado el *homomorfismo de restricción* o la *restricción de G a H*:

$$\operatorname{res}^G_H\colon H^n(G,A) \longrightarrow H^n(H,A),$$

para $n \geq 0$.

Para el transfer, es necesario entender la construcción del mismo. Para ello, consideremos G un grupo finito y $H \leq G$ de índice m y un G-módulo A. Sean $g_1, g_2, \ldots, g_m$ representantes de las clases laterales izquierdas de H en G. Definimos la función

$$\begin{aligned} \psi\colon \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, A) &\longrightarrow A \\ f \quad &\longmapsto \sum_{i=1}^{m} g_i \cdot f(g_i^{-1}) \end{aligned}$$

Claramente es un homomorfismo de G-módulos, ya que

$$\psi(g \cdot f) = \sum_{i=1}^{m} g_i \cdot (g \cdot f)(g_i^{-1}) = \sum_{i=1}^{m} g_i f(g_i^{-1} g) = \sum_{i=1}^{m} g_i f((g^{-1} g_i)^{-1}).$$

Dado que que $g^{-1}g_i$ pertenece a alguna clase lateral izquierda g_jH, podemos afirmar que existe algún $h \in H$ tal que

$$g_i^{-1} g = (g^{-1} g_i)^{-1} = g_j h = (h^{-1} g_j)^{-1} \text{ y que } \; g_i = g g_j h.$$

Por lo tanto, considerando la última igualdad entre las anteriores, tendremos que es igual a

$$\sum_{i=1}^{m} g_i f((g_j h^{-1})^{-1}) = \sum_{i=1}^{m} g_i f(h g_j^{-1}) = \sum_{i=1}^{m} g_i h f(g_j^{-1}) = \sum_{i=1}^{m} (g g_j h) h f(g_j^{-1}) = g(\sum_{i=1}^{m} g_j f(g_j^{-1}))$$

Donde claramente la última identidad es $g\psi(f)$, viendo así que se cumpla que $\psi(g \cdot f) = g\psi(f)$, donde G actúa permutando las clases laterales. Por otro lado, es fácil ver que ψ no depende de los representantes $g_1, \ldots g_m$ de las clases laterales. Si consideramos por representante de cada clase un $g_i h_i$ en vez de g_i, entonces

$$\sum_{i=1}^{m} g_i h_i \cdot f((g_i h_i)^{-1}) = \sum_{i=1}^{m} g_i h_i \cdot f(h_i^{-1} g_i^{-1}) = \sum_{i=1}^{m} g_i h_i h_i^{-1} f(g_i^{-1}) = \sum_{i=1}^{m} g_i f(g_i^{-1}) = \psi(f),$$

ya que f es un homomorfismo entre $\mathbb{Z}H$-módulos y es compatible con la inclusión de $H \hookrightarrow G$. Por tanto ψ no depende de los representantes. Por otra parte, ψ es un homomorfismo de G-módulos, entonces es posible obtener un homomorfismo de grupos de $H^n(G, \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, A))$ a $H^n(G, A)$ para todo $n \geq 0$. Por el lema de Shapiro

$$H^n(G, \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, A)) \cong H^n(H, A).$$

Definición 1.81. Componiendo el morfismo inducido por ψ con el isomorfismo de Shapiro, se obtiene el homomorfismo corestricción:

$$\mathrm{Cor}\colon H^n(H, A) \longrightarrow H^n(G, A),$$

para $n \geq 0$. Es importante aclarar que el homomorfismo corestricción es también llamado el homomorfismo transfer.

Si G es un grupo y consideramos $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ con la acción trivial de G, entonces se tiene que $H^1(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \hat{G}$ es el grupo dual de G. Como $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es abeliano, todo homomorfismo de G a $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ factoriza a través de G_{ab}. De aquí podemos decir que $\hat{G} = \hat{G}_{ab}$, esto es, estamos afirmando que el grupo dual de G es abeliano, además de decir que el dual de la abelianización de G es el mismo que el de G.

Una de las motivaciones de la creación del transfer fue el hecho de que existiera el transfer original, el cual es conocido actualmente por su nombre alemán *Verlangerungen*:

Definición 1.82. Dado un grupo finito G y $H \leq G$, el homomorfismo $\mathrm{Cor}\colon H^1(H, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ da un homomorfismo de grupos entre $\hat{H}_{ab}$ y $\hat{G}_{ab}$, el cual genera un homomorfismo de grupos

$$\mathrm{Ver}\colon G_{ab} \longrightarrow H_{ab}$$

llamado originalmente el homomorfismo transfer. Se puede comprobar que Ver trabaja de la siguiente manera: consideremos $g_1, \ldots, g_n$ representantes de las clases laterales izquierdas de H en G y fijemos un $g \in G$. Cada gg_i está en alguna clase lateral derecha g_jH donde $j \in \{1, \ldots n\}$. Por tanto podemos decir que cada $gg_i = g_jh_i$. La función se define para cada $g \in G$ como

$$\mathrm{Ver}(g) = \prod_{i=1}^{n} h_i$$

Dado que la imagen de Ver es en un grupo abeliano, el orden de los productos h_i es irrelevante.

Definición 1.83. Sea $H \leq G$. Se define que un elemento $a \in H^*(H;A)$ es *estable* si para todo $x \in G$, se cumple que

$$\operatorname{res}^{xHx^{-1}}_{xHx^{-1}\cap H} c_x^*(a) = \operatorname{res}^{H}_{xHx^{-1}\cap H}(a)$$

Donde $c_x^* \colon H^*(H,A) \longrightarrow H^*(xHx^{-1},A)$ es el homomorfismo inducido por la conjugación con $x \in G$.

El homomorfismo transfer es un ingrediente importante en la demostración del siguiente teorema:

Teorema 1.84. ***(Cartan-Eilenberg)*** *Dado G un grupo de orden finito, si S es un p-subgrupo de Sylow de G, entonces*

$$H^*(G,\mathbb{F}_p) \leq H^*(S,\mathbb{F}_p)$$

Esto es, el anillo de cohomología de G con coeficientes en $\mathbb{F}_p$ es un subanillo del anillo de cohomología de S con coeficientes en $\mathbb{F}_p$. Más aún, corresponde al subanillo de elementos estables del anillo de cohomología de S con coeficientes en $\mathbb{F}_p$.

Capítulo 2

Sistemas de fusión

Este capítulo está basado en gran parte en [4] y [25]. Puig estudia desde un enfoque algebraico lo que son las P-categorías de Frobenius; Broto et al. en [4] por su parte hacen énfasis en los espacios clasificantes de las mismas estructuras bautizadas bajo el nombre de sistemas de fusión; finalmente, ésto dará paso al estudio de Gelvin sobre la generalización de los sistemas de fusión a los sistemas de acción de fusión.

Para el comprendimiento de este capítulo y los posteriores, se definen los siguientes conceptos:

Definición 2.1. Para los siguientes dos capítulos cada vez que se haga referencia de un grupo, se entenderá que es un grupo finito a menos que se especifique lo contrario. Se denota por: $\mathrm{Syl}_p(G)$ al conjunto de p-subgrupos de Sylow del grupo G; $\mathrm{Inj}(P,Q)$ al conjunto de homomorfismos inyectivos de P a Q; $\mathrm{Aut}_G(P)$ al grupo de automorfismos de P dados por conjugaciones de elementos en G y a $\mathrm{Aut}(P)$ al grupo de automorfismos de P; $\mathrm{Inn}(P)$ al grupo de automorfismos por conjugación de elementos en P, llamado grupo de automorfismos internos; y $\mathrm{Out}_G(P) = \mathrm{Aut}_G(P)/\mathrm{Inn}(P)$ llamado grupo de automorfismos externos.

2.1 Sistemas de fusión

El concepto de sistema de fusión inicialmente fue concebido como una P-categoría de Frobenius. La mayoría de los resultados expuestos aquí son parte de [4], por lo que usaremos el nombre de sistema de fusión.

Definición 2.2. Dado un p-grupo finito S, se define un *sistema de fusión $\mathcal{F}$ basado en S* como una subcategoría $\mathcal{F}$ de la categoría de grupos cuyos objetos son los subgrupos de S, y cuyo conjunto de morfismos, que denotaremos por $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P,Q)$, satisface las siguientes condiciones:

- $\mathrm{Hom}_S(P,Q) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P,Q) \subseteq \mathrm{Inj}(P,Q)$ para cualesquiera $P,Q \leq S$ y
- cada morfismo en $\mathcal{F}$ se factoriza como un isomorfismo en $\mathcal{F}$ seguido de una inclusión.

Al ser una categoría, el conjunto de morfismos entre un objeto P y un objeto Q de un sistema de fusión debería denotarse por $\mathrm{Mor}_{\mathcal{F}}(P,Q)$. Sin embargo, al ser homomorfismos de grupos, los denotaremos por $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P,Q)$.

En su definición de sistema de fusión, Gelvin llama al segundo punto de la misma como el *Axioma de Divisibilidad.* ([10], cap. 4). Tanto Puig como Broto et al. no definen un nombre para esto, por lo que de ser requerido, acudiremos al nombre usado por Gelvin.

A partir de este punto se entenderá que un grupo P sea $\mathcal{F}$-conjugado con Q si existe un morfismo $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P,Q)$ tal que $\varphi(P) = Q$. En caso de que sea evidente el sistema de fusión $\mathcal{F}$ del que se hable, simplemente se dirá que son conjugados.

Definición 2.3. Para cualquier $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$, con G finito, se define la categoría $\mathcal{F}_S(G)$ cuyos objetos son los subgrupos $P \leq S$ y los morfismos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_S(G)}(P,Q) = \mathrm{Hom}_G(P,Q)$ para cualesquiera $P,Q \leq S$ como el *sistema de fusión relativo a G basado en S.*

Si el sistema de fusión es basado en $G = S$, denotaremos por $\mathcal{F}_S := \mathcal{F}_S(S)$. Si se refiere a un sistema de fusión general, se denotará por $\mathcal{F}$.

Para los ejemplos a continuación, es claro que los objetos de los sistemas de fusión son los subgrupos del p-grupo S sobre el que se basa el sistema de fusión. Sin embargo, el grupo trivial, (que denotaremos por 1 cuando se haga mención de él) no se contemplará en el diagrama por cuestiones de su poca relevancia en la categoría, dado que sus automorfismos son también el grupo trivial.

Ejemplo 2.4. [†] Sea G el 4-grupo de Klein $\langle a, b \mid a^2 = b^2 = (ab)^2 \rangle$. Claramente G es de orden 4 y por tanto su 2-grupo de Sylow será G mismo. Si realizamos el sistema de fusión $\mathcal{F}_G$, una revisión rápida permite observar que los objetos serán $P_\alpha = \langle \alpha \rangle$, $P_\beta = \langle \beta \rangle$, $P_{\alpha\beta} = \langle \alpha\beta \rangle$ y G. Como el grupo G es abeliano, para todo $g \in G$ se cumplirá que $gPg^{-1} = P$, por lo que el conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_G}(P_i, P_j)$ será vacío si $i \neq j$ y será $\{id_{P_i}\}$ si $i = j$. Para $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_G}(P_i, G)$ el conjunto sólo contendrá la inclusión $\iota\colon P_i \longrightarrow G$ y para $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_G}(G, G)$ el conjunto será $\{id_G\}$. Por tanto, la representación del sistema de fusión $\mathcal{F}_G$ conteniendo los morfismos del sistema de fusión (salvo sus automorfismos) será

$$\begin{tikzcd} & G & \\ P_\alpha \arrow[ur, hook] & P_{\alpha\beta} \arrow[u, hook] & P_\beta \arrow[ul, hook] \end{tikzcd}$$

quedando así el sistema de fusión basado en G relativo a él mismo.

Ejemplo 2.5. Si G es el grupo alternante de cuatro elementos y S es su 2-subgrupo de Sylow, es fácil ver que S es isomorfo al 4-grupo de Klein. Sea S el subgrupo dado por $\langle (1,2)(3,4), (1,3)(2,4) \rangle$.

[†] Para los ejemplos sólo es necesario calcular los automorfismos e inclusiones entre objetos por motivos del axioma de divisibilidad y del lema de Alperin. Es por ello que en los ejemplos sólo nos centraremos en calcular los mencionados en cuanto a morfismos.

Es posible ver que todo elemento en G normaliza a S: considerando que $S \leq N_G(S)$, su normalizador será de orden múltiplo de 4 y divisor de 12, por tanto sólo puede ser de orden 4 ó 12 (no existen subgrupos de orden 8 en G). Como $(1, 2, 3)$ está en el normalizador de S, $|S| = 4 < |N_G(S)|$, entonces es de orden 12, es decir, es G.

Al ser S abeliano, su centralizador será de orden 4 (él mismo) o de orden 12 (todo el normalizador). Dado que el elemento $(1, 2, 3) \in G$ no centraliza a S, puesto que

$$(1, 2, 3)(1, 2)(3, 4)(1, 3, 2) = (1, 3)(2, 4),$$

y el elemento $(1, 3)(2, 4)$ no está en $C_G(S)$, se tendrá que el centralizador de S es él mismo.

De las últimas afirmaciones es posible deducir que, como

$$\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_S(G)}(S) \cong N_G(S)/C_G(S) \text{ y } |N_G(S)/C_G(S)| = 12/4 = 3,$$

entonces $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_S(G)}(S) \cong \mathbb{Z}_3$. Para el caso de los grupos P_i, como son grupos de orden 2, el único automorfismo que pueden tener es la identidad, por lo que $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_S(G)}(P_i)$ es el conjunto que contiene la identidad del grupo en cuestión. La idea importante de este ejemplo es que ahora se tendrá que existen morfismos que hagan conjugados a los subgrupos de orden 2:

$$(1, 2, 3) \cdot (1, 2)(3, 4) \cdot (1, 2, 3)^{-1} = (1, 3)(2, 4)$$
$$(3, 2, 1) \cdot (1, 2)(3, 4) \cdot (3, 2, 1)^{-1} = (1, 4)(2, 3).$$

Por esto, es posible conectar a cada P_i con los otros P_j. Así, el diagrama del sistema de fusión relativo al grupo A_4 basado en S queda dado por:

$$\begin{tikzcd}
 & S & \\
P_{(1,2)(3,4)} \arrow[ur, hook] \arrow[r, leftrightarrow, "c_{(1,2,3)}"] & P_{(1,3)(2,4)} \arrow[u, hook] \arrow[r, leftrightarrow, "c_{(3,2,1)}"] & P_{(1,4)(2,3)} \arrow[ul, hook]
\end{tikzcd}$$

donde es claro que este sistema de fusión difiere del sistema de fusión en el ejemplo 2.4 por el hecho de que existen homomorfismos que conectan a cada P_i con los P_j.

Ejemplo 2.6. Si ahora G es el grupo producto directo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_7$, el 2-Sylow de G será $S = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle$, el cual es isomorfo al 4-grupo de Klein. Si realizamos el sistema de fusión $\mathcal{F}_S(G)$, los objetos serán los mismos que en los dos ejemplos anteriores, y los morfismos serán únicamente la identidad. Esto último es debido a que, al ser G un grupo abeliano, el normalizador de cualquier 2-grupo, va a ser su centralizador, pues para todo $g \in G$ y $p \in P$ con $P \leq G$, se tendrá que $gpg^{-1} = p$, haciendo evidente que también $gPg^{-1} = P$. Entonces para todo $P \leq G$, $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(P) \cong N_G(S)/C_G(S) \cong 1$. Por tanto el diagrama que representa al sistema de fusión relativo a G basado en S (salvo sus automorfismos) será

$$
\begin{tikzcd}
 & S & \\
\langle(1,0,0)\rangle \arrow[ur, hook] & \langle(1,1,0)\rangle \arrow[u, hook] & \langle(0,1,0)\rangle \arrow[ul, hook]
\end{tikzcd}
$$

dejando así que es un sistema de fusión isomorfo (como categoría) al dado en el ejemplo 2.4.

En general, para cualquier grupo abeliano G y p primo tal que p divide a $|G|$, el sistema de fusión determinado para cualquiera de sus p-grupos de Sylow tiene automorfismos triviales para cualquiera de los objetos del sistema de fusión, lo cual vuelve sencillo hacer ejemplos de sistemas de fusión en grupos abelianos pues los únicos morfismos de interés son las inclusiones entre los objetos. En pocas palabras, si G es abeliano y S es un p-Sylow de G, $\mathcal{F}_S(G) \cong \mathcal{F}_S$.

Ejemplo 2.7. Otro ejemplo de un sistema de fusión es el basado en $S = UT(3,3)$ donde $UT(3,3)$ es el grupo de matrices triangulares superiores de tamaño 3×3 con coeficientes en $\mathbb{F}_3$ y de diagonal con sólo unos. Este grupo es isomorfo a $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \ltimes \mathbb{Z}_3$ donde la acción de $\mathbb{Z}_3$ sobre $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ es la no trivial (única salvo isomorfismo). Usando su 3-subgrupo de Sylow, que es él mismo, el siguiente diagrama es una representación de los morfismos del sistema de fusión que son inclusiones o isomorfismos, mas no incluye los automorfismos de la categoría (principalmente por razones de espacio).

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & S & & & & & \\
 & & Q_1 \arrow[urrr] & & Q_2 \arrow[ur] & & Q_3 \arrow[ul] & & Q_4 \arrow[ulll] & & \\
P_2 \arrow[urr] \arrow[r, leftrightarrow] & P_3 \arrow[ur] \arrow[r, leftrightarrow] & P_4 \arrow[u] & & & P_1 \arrow[ulll] \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[urrr] & & & P_{11} \arrow[u] \arrow[r, leftrightarrow] & P_{12} \arrow[ul] \arrow[r, leftrightarrow] & P_{13} \arrow[ull] \\
 & & P_5 \arrow[uurr] \arrow[r, leftrightarrow] & P_6 \arrow[uur] \arrow[r, leftrightarrow] & P_7 \arrow[uu] & & P_8 \arrow[uu] \arrow[r, leftrightarrow] & P_9 \arrow[uul] \arrow[r, leftrightarrow] & P_{10} \arrow[uull] & &
\end{tikzcd}$$

Donde cada $Q_i \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ y cada $P_i \cong \mathbb{Z}_3$, con P_1 el centro de S. Por otra parte dado que todo morfismo en $\mathcal{F}_S$ es composición de automorfismos e inclusiones, sólo será necesario describir los automorfismos de cada grupo y las inclusiones entre ellos para obtener todos los morfismos de $\mathcal{F}_S$. Los automorfismos son $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_S}(P_i) = 1$ y $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_S}(Q_i) \cong \mathbb{Z}_3$, y $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_S}(S) \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.

Ahora, es claro que para un grupo finito G, todo sistema de fusión relativo a G basado en cualquiera de sus p-Sylows, terminará siendo el mismo en el siguiente sentido.

Teorema 2.8. *Dado un grupo finito G, y dos $S, S' \in \mathrm{Syl}_p(G)$, los sistemas de fusión $\mathcal{F}_S(G)$ y $\mathcal{F}_{S'}(G)$ son isomorfos como categorías.*

Prueba. Al ser p-subgrupos de Sylow de G, por uno de los teoremas de Sylow, $gSg^{-1} \cong S'$ para cierto $g \in G$. Usando el funtor F tal que $F(P) = gPg^{-1}$ para todo $P \in \mathrm{Ob}(\mathcal{F}_S(G))$ y $F(\varphi) = c_g \circ \varphi \circ c_g^{-1}$ para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_S(G)}(P, Q)$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "c_g"'] & Q \arrow[d, "c_g"] \\
gPg^{-1} \arrow[r, "F(\varphi)"] & gQg^{-1}
\end{tikzcd}$$

Como todo φ es una conjugación c_m para algún $m \in G$, tendremos que el morfismo $c_g \circ \varphi \circ c_g^{-1}$ se puede ver como $c_{gmg^{-1}}$, por lo que los morfismos seguirían siendo conjugaciones. Con esto, es claro que define un funtor de $\mathcal{F}_S(G)$ a $\mathcal{F}_{S'}(G)$. Si consideramos el funtor inverso F' donde

$F'(gPg^{-1}) = g^{-1}(gPg^{-1})g = P$ y $F'(\varphi) = c_g^{-1}\varphi c_g$ tendremos que podremos ir de $\mathcal{F}_{S'}(G)$ a $\mathcal{F}_S(G)$, además de ser claramente el funtor inverso de F, probando así que son categorías isomorfas. $\square$

Definición 2.9. Sea $\mathcal{F}$ un sistema de fusión basado en un p-grupo S. Un *subsistema de fusión* $\mathcal{A}$ de $\mathcal{F}$ es una subcategoría $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$, que es un sistema de fusión él mismo basado en un p-grupo $T \leq S$.

La importancia de la definición 2.9 es que nos permite obtener sistemas de fusión basándonos de sistemas de fusión más grandes, haciendo posible generar sistemas de fusión sin que sean p-subgrupos de Sylow de un grupo.

Es importante hacer énfasis en la distinción entre un sistema de fusión relativo a un grupo G y un sistema de fusión saturado general, dado que hay sistemas de fusión saturados que no son isomorfos a $\mathcal{F}_S(G)$ para ningún grupo finito[†] G con p-subgrupo de Sylow S, y por tanto se les llama *exóticos*. Algunos de los estudios relativos a los sistemas de fusión es la búsqueda de éstos sistemas de fusión exóticos.

Definición 2.10. Se dice que un sistema de fusión saturado es *exótico* si no es isomorfo a un sistema de fusión relativo a un grupo G.

El primer caso obtenido de un sistema de fusión exótico fue resultado de las investigaciones de Ron Solomon sobre la clasificación de grupos finitos simples. Debido a la cantidad de detalles que habría que cubrir y a la construcción tan extensa que se suele realizar para obtener sistemas de fusión exóticos, resulta difícil exponer algún ejemplo aquí. Es por ello que recomendamos al lector acudir a [19] para obtener una forma detallada tanto de la cons-

[†]Es preciso remarcar el hecho de que no lo haya únicamente entre los grupos finitos, pero es posible que sí existan grupos de orden infinito cuyo sistema de fusión relativo a ellos basado en alguno de sus p-grupos sea isomorfo a este sistema de fusión.

trucción del sistema de fusión exótico de Solomon, como de la explicación del por qué lo es. Para otros ejemplos de sistemas de fusión exóticos, el lector también puede acudir a [28] y [2] (p. 214-221 PART III)

Definición 2.11. Dado un sistema de fusión $\mathcal{F}$ basado en un p-grupo S,

- Un subgrupo $P \leq S$ es *totalmente centralizado en* $\mathcal{F}$ si $|C_S(P)| \geq |C_S(Q)|$ para todo $Q \leq S$ que sea $\mathcal{F}$-conjugado con P.
- Un subgrupo $P \leq S$ es *totalmente normalizado en* $\mathcal{F}$ si $|N_S(P)| \geq |N_S(Q)|$ para todo $Q \leq S$ que sea $\mathcal{F}$-conjugado con P.

Los conceptos de S-categoría de Frobenius divisible que Puig definió en [25] son los mismos que manejan Broto et al. en [4]. Sin embargo el conceptos de Gelvin (en [10]) y el de Puig ([25]) y el de Broto et al. ([4]) llegan al mismo punto de conceptualización cuando Gelvin considera un sistema de fusión *abstracto*, que es el caso que manejan Puig y Broto et al. desde un principio.

Teorema 2.12. *Sea S un p-subgrupo de Sylow de un grupo G y $P \leq S$. Se cumple que P es totalmente normalizado en $\mathcal{F}_S(G)$ si y sólo si $N_S(P) \in \mathrm{Syl}_p(N_G(P))$*

Prueba. Sea $L \in \mathrm{Syl}_p(N_G(P))$. Como L es un p-subgrupo de G, existe un p-subgrupo de Sylow $\mathbb{L}$ de G que lo contiene. Dado que todos los p-subgrupos de Sylow de G son conjugados, existe $g \in G$ tal que $g\mathbb{L}g^{-1} = S$, por tanto $\mathbb{L} = g^{-1}Sg$, y con esto, $L \leq g^{-1}Sg$.

Como $N_{g^{-1}Sg}(P)$ es un subgrupo de $g^{-1}Sg$, es claro que $N_{g^{-1}Sg}(P)$ será un p-grupo. Dado que L es un p-subgrupo de Sylow de $N_G(P)$ se cumplirá que $|N_{g^{-1}Sg}(P)| \leq |L|$ ya que $N_{g^{-1}Sg}(P) \leq N_G(P)$; por otra parte todo elemento que normalice a P en $g^{-1}Sg$ está contenido en $N_{g^{-1}Sg}(P)$, por lo que, como $L \leq g^{-1}Sg$, necesariamente ocurrirá que

$$L \leq N_G(P) \cap (g^{-1}Sg) = N_{g^{-1}Sg}(P)$$

Debido a ambas afirmaciones, $N_{g^{-1}Sg}(P) = L$.

Esto último implica que $N_{g^{-1}Sg}(P) \in \mathrm{Syl}_p(N_G(P))$, por lo que también se tendrá que $N_S(gPg^{-1}) \in \mathrm{Syl}_p(N_G(gPg^{-1}))$ dado que la conjugación por g induce una correspondencia biyectiva entre $N_{g^{-1}Sg}(P)$ y $N_S(gPg^{-1})$ y entre $N_G(P)$ y $N_G(gPg^{-1})$.

Para todo subgrupo $P' \leq S$ tal que $P' \cong_{\mathcal{F}_S(G)} P$, se tendrá que $|N_G(P)| = |N_G(P')|$. Como $N_S(P')$ es un p-subgrupo de $N_G(P')$ y $N_S(gPg^{-1})$ es un p-subgrupo de Sylow de $N_G(gPg^{-1})$, es claro que $|N_S(P')| \leq |N_S(gPg^{-1})|$, ya que $N_G(P')$ y $N_G(gPg^{-1})$ tienen la misma cardinalidad. Por tanto, gPg^{-1} es totalmente normalizado en $\mathcal{F}$.

Esto implica que P es totalmente normalizado en $\mathcal{F}$ si y sólo si $|N_S(P)| = |N_S(gPg^{-1})|$. Esto último es cierto si y sólo si $N_S(P) \in \mathrm{Syl}_p(N_G(P))$. $\square$

Sustituyendo el normalizador por el centralizador en la prueba anterior, se puede obtener el mismo resultado para los subgrupos totalmente centralizados:

Teorema 2.13. *Dado un p-subgrupo de Sylow S de un grupo finito G y $P \leq S$, P es totalmente centralizado en $\mathcal{F}_S(G)$ si y sólo si $C_S(P) \in \mathrm{Syl}_p(C_G(P))$.*

Prueba. La demostración del teorema es análoga a la de totalmente normalizado sustituyendo los normalizadores por centralizadores y totalmente normalizado por totalmente centralizado. $\square$

Definición 2.14. Un sistema de fusión $\mathcal{F}$ basado en un p-grupo S es *saturado* si cumple las siguientes dos condiciones:

- Cualquier $P \leq S$ totalmente normalizado en $\mathcal{F}$ también es totalmente centralizado en $\mathcal{F}$ y $\mathrm{Aut}_S(P) \in \mathrm{Syl}_p(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(P))$

- Si $P \leq S$ y $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P, Q)$ son tales que $\varphi(P)$ es totalmente centralizado, y definimos el conjunto
$$N_\varphi := \{g \in N_S(P) \big| \varphi c_g \varphi^{-1} \in \ \mathrm{Aut}_S(\varphi(P))\},$$
entonces existe un homomorfismo $\overline{\varphi} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(N_\varphi, S)$ tal que $\overline{\varphi}\big|_P = \varphi$.

El hecho de que $\varphi c_g \varphi^{-1} \in \ \mathrm{Aut}_S(\varphi(P))$ implica que $\varphi c_g \varphi = c_h$ como automorfismos para algún $c_h \in \mathrm{Aut}_S(\varphi(P))$.

De la definición anterior, la primera condición suele ser referida como la *condición de Sylow*, mientras que la segunda condición suele ser referida como la *condición de Extensión*. Ambos se conocen como los *axiomas de saturación*

Para el siguiente resultado, es necesario notar este lema previo basado únicamente en conocimientos de teoría de grupos:

Lema 2.15. Sea H un subgrupo normal de G con índice una potencia de un primo p. Dados dos p-subgrupos de Sylow S, S' de G, se tendrá que $S' = hSh^{-1}$ para algún $h \in H$.

Prueba. Tenemos que:

$$[G:S] = \frac{|G|}{|S|} = \frac{|G/H|\,|H|}{|SH/H|\,|H \cap S|}$$

ya que $|G| = |H|\,|G/H|$ y por el segundo teorema de isomorfismos $SH/H \cong S/(H \cap S)$. Por otra parte, $|SH/H|$ divide a $|G/H|$ y $|H \cap S|$ divide a $|H|$. Entonces $|H|\,/\,|H \cap S|$ y $|G/H|\,/\,|S/H|$ son enteros, por lo que tenemos que:

$$\frac{|G|}{|S|} = \frac{|G/H|}{|SH/H|} \cdot \frac{|H|}{|H \cap S|}.$$

Como S es un p-subgrupo de Sylow, se tiene que $[G:S] = |G|/|S|$ es primo relativo con p. Entonces $|G/H| = |SH/H|$, pues $|G/H|$ es potencia de p y $|G/H|/\,|SH/H|$ un entero positivo, por lo que la única forma de que este número sea primo relativo con p y una potencia de p, es que sea 1. Por otra parte, existe la inclusión $SH/H \hookrightarrow GH/H$ donde $\pi([sh]) = [sh]$, por lo que, teniendo dos grupos del mismo orden y una inclusión entre éstos, necesariamente son iguales, por tanto $SH/H = G/H$.

Si $x \in G$, $xH = sh_1H$ se tendrá que $(sh_1)^{-1}x = h_2$, entonces $x = sh_1h_2$, por lo que todo elemento x en G puede verse de la forma sh con $s \in S$, $h \in H$, es decir, $G = SH$.

Finalmente, consideremos un p-subgrupo de Sylow S' distinto de S. Por el segundo teorema de Sylow, existe un $sh \in G$ tal que $(sh)^{-1}Ssh = S'$. Reescribiendo la identidad, es equivalente a decir que $h^{-1}Sh = S'$, esto es, existe un $h \in H$ tal que S conjugado bajo esta h es S', cumpliendo así el resultado. □

Teorema 2.16. *Sea S un p-Sylow de G. Entonces el sistema de fusión $\mathcal{F}_S(G)$ es saturado.*

Prueba. Para probar que se cumplen los axiomas de saturación, primero probaremos la condición de Sylow.

Si P es totalmente normalizado en $\mathcal{F}_S(G)$, implica por el teorema 2.12 que $N_S(P) \in \mathrm{Syl}_p(N_G(P))$. Sea $|N_G(P)| = p^\alpha k$ con $(p,k) = 1$. Esto implica que $|N_S(P)| = p^\alpha$. Aparte, sea $|C_G(P)| = p^\beta q$ con $(p,q) = 1$.

$$|\mathrm{Aut}_G(P)| = \frac{|N_G(P)|}{|C_G(P)|} = \frac{p^\alpha k}{p^\beta q} = p^{\alpha-\beta} r$$

con $r = k/q$. Sea $|C_S(P)| = p^\delta$ (nótese que $\delta \leq \beta$). Calculando $|\mathrm{Aut}_S(P)|$ tenemos:

$$|\mathrm{Aut}_S(P)| = \frac{|N_S(P)|}{|C_S(P)|} = \frac{p^\alpha}{p^\delta} = p^{\alpha-\delta}.$$

Como $\mathrm{Aut}_S(P) \leq \mathrm{Aut}_G(P)$, se tiene que $p^{\alpha-\delta} \mid p^{\alpha-\beta} r$, en concreto, $p^{\alpha-\delta} \mid p^{\alpha-\beta}$ (ya que mcd(p,r)=1), teniendo así que $p^{\alpha-\delta} \leq p^{\alpha-\beta}$. Ésto último implica que necesariamente $\alpha - \delta \leq \alpha - \beta$, por tanto $\delta = \beta$, lo que hace que necesariamente $C_S(P) \in \mathrm{Syl}_p(C_G(P))$. Por el teorema 2.13, podemos concluir que P es totalmente centralizado. De la misma forma queda implícito que $|\mathrm{Aut}_S(P)| = p^{\alpha-\beta}$ haciendo que $\mathrm{Aut}_S(P) \in \mathrm{Syl}_p(\mathrm{Aut}_G(P))$, cumpliendo así la condición de Sylow.

Para probar la condición de extensión, consideremos un subgrupo $P \leq S$ y sea $g \in G$ tal que $gPg^{-1} \leq S$ es totalmente centralizado en $\mathcal{F}_S(G)$. Definimos los siguientes conjuntos:

$$N = \{x \in N_S(P) \mid c_g \circ c_x \circ c_g^{-1} \in \mathrm{Aut}_S(gPg^{-1})\}$$

$$N' = \{x \in N_S(gPg^{-1}) \mid {c_g}^{-1} \circ c_x \circ c_g \in \mathrm{Aut}_S(P)\}$$

y sean $N_G = N \cdot C_G(P)$ y $N'_G = N' \cdot C_G(gPg^{-1})$.

Veamos que $gN_Gg^{-1} = N'_G$. Para ello es suficiente ver que $gN_Gg^{-1} \subseteq N'_G$ y $gC_G(P)g^{-1} \subseteq N'_G$ ya que si $n \in N$ y $c \in C_G(P)$, es claro que $gncg^{-1} = gng^{-1}gcg^{-1}$. Es claro que $gcg^{-1} \in C_G(gPg^{-1})$, así que sólo necesitamos ver que $gng^{-1} \in N'_G$.

Al ser $n \in N$, tendremos que $c_{gng^{-1}} = c_{n'} \in \mathrm{Aut}_S(gPg^{-1})$ para algún $n' \in N_S(gPg^{-1})$, implicando que $(n')^{-1}gng^{-1} \in C_G(gPg^{-1})$ y por tanto que $(n')^{-1}gng^{-1} = c''$ para un $c'' \in C_G(gPg^{-1})$.

Así, $gng^{-1} = n'c'$. Como $n' \in N_S(gPg^{-1})$, tenemos que $c_{g^{-1}n'g} \in \mathrm{Aut}_S(P)$, y así $n' \in N'$. Por lo tanto, gng^{-1} es el producto de un elemento en N' y uno en $C_G(gPg^{-1})$, y con esto $gN_Gg^{-1} \subseteq N'_G$. De forma análoga se obtiene que $gN_Gg^{-1} \supseteq N'_G$. Luego $gN_Gg^{-1} = N'_G$.

Vemos que gNg^{-1} y N' son p-subgrupos de N'_G, ya que ambos están contenidos en los respectivos p-grupos $gN_S(P)g^{-1}$ y $N_S(gPg^{-1})$.

Si $x \in C_S(gPg^{-1})$ en particular está en $N_S(gPg^{-1})$. Tenemos entonces que para todo $p \in P$, se cumplirá que:

$$c_{g^{-1}xg}(p) = g^{-1}xgpg^{-1}x^{-1}g = g^{-1}(gpg^{-1})xx^{-1}g = g^{-1}gpg^{-1}g = p$$

y por lo tanto $x \in N'$. Por otra parte, si $x \in N' \cap C_G(gPg^{-1})$, necesariamente $x \in N_S(gPg^{-1}) \subseteq S$, por lo que $x \in S \cap C_G(gPg^{-1}) = C_S(gPg^{-1})$. De lo anterior concluimos que $N' \cap C_G(gPg^{-1}) = C_S(gPg^{-1})$. Entonces, tendremos la siguiente identidad

$$[N'_G : N'] = \frac{|N' \cdot C_G(gPg^{-1})|}{|N'|} = \frac{|N'|\,|C_G(gPg^{-1})|}{|N'|\,|N' \cap C_G(gPg^{-1})|} = \frac{|C_G(gPg^{-1})|}{|C_S(gPg^{-1})|}.$$

Dado que gPg^{-1} es totalmente centralizado, el índice de $C_S(gPg^{-1})$ con $C_G(gPg^{-1})$ es primo relativo con p implicando así que, al ser N' un p-subgrupo de N'_G, también sea un p-subgrupo de Sylow del mismo.

Como N' y gNg^{-1} son p-subgrupos de N'_G, y N' es un p-subgrupo de Sylow, existe un p-Sylow N_b tal que $gNg^{-1} \leq N_b$.

Luego, por el lema 2.15, al ser $C_G(gPg^{-1}) \trianglelefteq N'_G$ y tener índice potencia de un primo, podemos considerar un elemento $h \in C_G(gPg^{-1})$ tal que N_b esté conjugado con N'_G y como $gNg^{-1} \leq N_b$, se tendrá que $hgNg^{-1}h^{-1} \leq N'_G$. Así, podemos concluir que $c_{hg} \in \mathrm{Hom}_G(N, S)$, es una extensión del morfismo $c_g \in \mathrm{Hom}_G(P, S)$, ya que dado $p \in P$, al ser $h \in C_G(gPg^{-1})$:

$$c_{hg}(p) = h(gpg^{-1})h^{-1} = (gpg^{-1})hh^{-1} = gpg^{-1} = c_g(p)$$

demostrando así la propiedad de extensión y con ello los axiomas de saturación. $\square$

2.2 Subgrupos importantes en sistemas de fusión

En un sistema de fusión, varios conjuntos de objetos resultan importantes pues contienen más información sobre el sistema de fusión que otros. Este es el caso de los subgrupos céntricos, radicales y esenciales que se expondrán en esta sección.

Definición 2.17. Dado un sistema de fusión $\mathcal{F}$ basado en un p-grupo S, un subgrupo $P \leq S$ es $\mathcal{F}$*-céntrico*† si P y todos sus $\mathcal{F}$-conjugados contienen a sus $S-$centralizadores, es decir $C_S(Q) \leq Q$ para toda $Q \cong_{\mathcal{F}} P$. Se denota por $\mathcal{F}^c$ a la subcategoría completa de $\mathcal{F}$ cuyos objetos son los subgrupos $\mathcal{F}$-céntricos de S.

Es claro que para todo grupo $P \leq S$, se tiene que $Z(P) \leq C_S(P)$. El concepto de $\mathcal{F}$-céntrico exige que $C_S(P) \leq P$, y por lo tanto, que $Z(P) \geq C_S(P)$. Como consecuencia del concepto de céntrico, y de la contención mencionada, para los subgrupos P céntricos se tiene $Z(P) = C_S(P)$.

Ejemplo 2.18. Retomemos el primer ejemplo de un sistema de fusión. Sea G el 4-grupo de Klein y nuevamente consideremos su 2-Sylow, que es él mismo. La representación del sistema de fusión $\mathcal{F}_S(G)$ conteniendo los morfismos del sistema de fusión (salvo sus automorfismos) es

$$\begin{tikzcd} & G & \\ P_\alpha \arrow[ur] & P_{\alpha\beta} \arrow[u] & P_\beta \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

†L. Puig denomina los subgrupos céntricos como *autocentralizados* en [25]

Ahora, para ser céntrico algún 2-grupo P, debe ocurrir que $C_G(P) \leq P$, pero al ser abeliano G, todos los 2-grupos de orden 2 tienen por centralizador a todo G, que es de orden 4. Entonces ninguno de ellos es céntrico. El único candidato restante a 2-grupo céntrico es G, el cual su centro es justamente él mismo. Por consecuente, la categoría $\mathcal{F}_S(G)^c$ es dada por G con el grupo de automorfismos de G, que es únicamente la identidad.

Ejemplo 2.19. Basándonos en el grupo Mathieu$_{12}$ (que denotaremos por M_{12}), y tomando su 3-subgrupo de Sylow, tenemos al mismo grupo que en el caso del sistema de fusión dado en el ejemplo 2.7, es decir $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \ltimes \mathbb{Z}_3$. En este caso, la subcategoría $\mathcal{F}^c$ queda descrita en el siguiente diagrama (sin considerar los automorfismos) como:

$$\begin{tikzcd}
 & & S & & \\
Q_1 \arrow[urr] & Q_2 \arrow[ur] & & Q_3 \arrow[ul] \arrow[r, leftrightarrow] & Q_4, \arrow[ull]
\end{tikzcd}$$

donde nuevamente $Q_i \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$. En este caso, los automorfismos de los objetos céntricos de $\mathcal{F}_S(M_{12})$ son: $\mathrm{Aut}_{M_{12}}(Q_i) = GL_2(\mathbb{F}_3)$ para $i = 1, 2$, $\mathrm{Aut}_{M_{12}}(Q_j) \cong S_3$ para $j = 3, 4$ y para S se tiene que $\mathrm{Aut}_{M_{12}}(S) \cong S_3 \times S_3$. Este cálculo se obtuvo con GAP.

Para obtener ejemplos de sistemas de fusión céntricos con más de un subgrupo céntrico, es necesario considerar p-grupos S de orden mayor a p^2. De otra forma, para todo $P \leq S$, P será abeliano y por tanto si $\mathcal{F}$ es un sistema de fusión basado en S, entonces $\mathrm{Ob}(\mathcal{F}^c) = \{S\}$.

Es posible obtener una relación entre el concepto de subgrupo céntrico y el de subgrupo totalmente centralizado, que es la siguiente:

Teorema 2.20. *Dado un sistema de fusión $\mathcal{F}$ basado en un p-grupo S, cada subgrupo $\mathcal{F}$-céntricos P de S es totalmente centralizado en $\mathcal{F}$. Por otra parte, si $P \leq S$ es totalmente centralizado en $\mathcal{F}$, entonces $C_S(P) \cdot P$ es $\mathcal{F}$-céntrico.*

Prueba. Primero, es claro que si P es $\mathcal{F}$-conjugado con Q, entonces los centros de ambos grupos serán isomorfos. Entonces, si P es céntrico, para todo $Q \cong_{\mathcal{F}} P$, se tiene $C_S(Q) = Z(Q)$ porque $C_S(Q) \leq Q$. Por tanto

$$|C_S(Q)| = |Z(Q)| = |Z(P)| = |C_S(P)|,$$

por lo que P será totalmente centralizado por cumplir que $|C_S(P)| = |C_S(Q)|$ para todo $Q \cong_{\mathcal{F}} P$.

Para probar que si $P \leq S$ es totalmente centralizado entonces $C_S(P) \cdot P$ es céntrico, denotemos por $Q = C_S(P) \cdot P$.

Quisiéramos ver que $C_S(\varphi(Q)) \subseteq \varphi(Q)$ para todo homomorfismo $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(Q, S)$. Sea $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(Q, S)$ fijo y denotemos $Q' = \varphi(Q)$ y sea $P' = \varphi(P) \leq Q'$.

Notemos primero que al ser inyectiva la función φ, se tendrá que $|\varphi(C_S(P))| = |C_S(P)|$. Por otro lado, como P es totalmente centralizado, se tiene que $|C_S(\varphi(P))| \leq |C_S(P)|$. Por tanto, tenemos que

$$|C_S(\varphi(P))| \leq |C_S(P)| = |\varphi(C_S(P))|,$$

y de aquí, se tiene que $\varphi(C_S(P)) = C_S(P')$. De lo anterior, tenemos que

$$Q' = \varphi(C_S(P) \cdot P) = \varphi(C_S(P)) \cdot \varphi(P) = C_S(P') \cdot P'.$$

Por los mismos argumentos usandos para Q, podemos afirmar que $C_S(Q') \leq C_S(P') \leq Q'$, implicando así que Q sea céntrico. □

Definición 2.21. Sea $\mathcal{F}$ un sistema de fusión basado en un p-grupo S. Un subgrupo $P \leq S$ es llamado *$\mathcal{F}$-radical* si $\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(P)$ es p-reducido, es decir, si el máximo p-subgrupo normal de $\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(P)$ es 1. Cuando el sistema de fusión del que se trata es claro, se dice que el grupo es radical.[†]

Definición 2.22. Consideremos el grupo $G = S_3 \times \mathbb{Z}_3$, el grupo producto directo del grupo simétrico de tres elementos y $\mathbb{Z}_3$, y sea S su 3-Sylow, el cual es claro que será $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, que es de orden 9. Para generar el sistema de fusión $\mathcal{F}_S(G)$, necesitamos los subgrupos de S, los

[†]La mayoría de los autores denota por $\mathrm{O}_p(M)$ al máximo p-subgrupo normal en M.

cuales son los subgrupos de orden 3, que serán los generados por los elementos de orden 3, y S. Estos son: $P_0 := \langle((1,2,3),0)\rangle$, $P_1 := \langle((1,2,3),1)\rangle$, $P_2 := \langle((1,2,3),2)\rangle$ y $P_3 := \langle((),1)\rangle$. El diagrama del sistema de fusión queda dado (exceptuando los automorfismos) por

$$
\begin{tikzcd}
 & & S & & \\
P_0 \arrow[urr] & P_1 \arrow[ur] \arrow[rr, leftrightarrow, "c_{((1,2),0)}"] & & P_2 \arrow[ul] & P_3 \arrow[ull]
\end{tikzcd}
$$

Claramente, por ser abeliano, el grupo S no tiene automorfismos internos. Por otra parte, es de índice 2 en G, por lo que S es normal en G, implicando que $N_G(S) = G$. Además, su centralizador es únicamente S, ya que éste debiera ser de orden 9 ó 18, pero como los elementos de orden 2 en la entrada de S_3 no centralizan a los elementos de S, el centralizador deberá ser de orden 9. Por tanto, los automorfismos externos de S son

$$\mathrm{Out}_{\mathcal{F}_S(G)}(S) \cong \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_S(G)}(S) \cong N_G(S)/C_G(S) \cong \mathbb{Z}_2.$$

Luego es claro que S es radical.

Por otro lado, para cada P_i sus homomorfismos internos son triviales, pues al ser abeliano S, setendrá que $Z(P_i) = P_i$, luego $\mathrm{Out}_{\mathcal{F}_S(G)}(P_i) \cong \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_S(G)}(P_i)$ para todo $P_i \leq S$. Como el centralizador de cada P_i es S, el normalizador debe ser de orden 9 o 18. Como para P_0, P_1 y P_2 el elemento $((1,2),0)$ no está en sus normalizadores, para todos estos P_i se tendrá que $N_G(P_0) = N_G(P_1) = N_G(P_2) = S$. Para el caso de P_3, es fácil ver que $((1,2),0)$ sí conmuta con él, por lo que su normalizador debe ser todo G. Por tanto, podemos ver que

$$\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_S(G)}(P_0) \cong \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_S(G)}(P_1) \cong \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_S(G)}(P_2) \cong S/S,$$

donde es evidente que sus grupos de automorfismos son isomorfos al grupo trivial, y para P_3,

$$\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_S(G)}(P_3) \cong N_G(P_3)/C_G(P_3),$$

donde $|N_G(P_3)|/|C_G(P_3)| = 18/9 = 2$, por lo que es congruente a $\mathbb{Z}_2$. Por tanto, como los grupos de automorfismos de los P_i son iguales a sus grupos de automorfismos externos, sólo son isomorfos a $\mathbb{Z}_2$ o al grupo trivial. De esto, podemos ver que ambos posibles grupos de automorfismos externos son 3-reducidos, por lo que todos los P_i son radicales, implicando que todos los objetos de la categoría son radicales.

Ejemplo 2.23. Retomemos el ejemplo 2.7, recordando el sistema de fusión $\mathcal{F}_S(G)$, el cual utilizó el grupo $S \cong UT(3,3)$, el cual era de orden 27, y el grupo en cuestión de donde se obtuvo fue el grupo Mathieu$_{12}$, que denotamos M_{12}. En este caso, el diagrama de subgrupos $\mathcal{F}$-radicales queda dado (exceptuando los automorfismos) por:

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & S & & & & & \\
 & & Q_1 \arrow[urrr] & & Q_2 \arrow[ur] & & & & & & \\
P_2 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[urr] & P_3 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[ur] & P_4 \arrow[u] \arrow[d, leftrightarrow] & & & P_1 \arrow[ulll] \arrow[ul] & & & P_{11} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[uulll] \arrow[d, leftrightarrow] & P_{12} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[uullll] & P_{13}. \arrow[uulllll] \\
 & & P_5 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[uurr] & P_6 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[uur] & P_7 \arrow[uu] \arrow[ur, leftrightarrow] & & P_8 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[uuul] & P_9 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[uuull] & P_{10} \arrow[uuulll] & &
\end{tikzcd}$$

Como en este caso, los automorfismos de cada P_i son primos relativos a 3 (son isomorfos a $\mathbb{Z}_2$), todo subgrupo del mismo también, por lo que todo P_i es radical. Por otra parte, como los grupos Q_i con $i = 1,2,3,4$ cumplen que el centro del grupo es el mismo grupo dado que $Q_i \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, se tiene que $\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q_i) \cong \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q_i)$ para todo i. Como Q_3 y Q_4 tienen grupos de automorfismos isomorfos a S_3 en $\mathcal{F}_S(G)$, no son radicales, pues S_3 tiene un 3-subgrupo de índice dos que por lo tanto es normal. Para el caso de Q_1 y Q_2, sus grupos de automorfismos son isomorfos a $GL_2(\mathbb{F}_3)$, y su único 3-subgrupo no trivial es de orden 3, el cual no es normal en $GL_2(\mathbb{F}_3)$, por lo que para los subgrupos Q_1 y Q_2 sí son radicales. Para S su grupo de automorfismos en $\mathcal{F}_S(G)$ es $S_3 \times S_3$, y dado que el grupo de automorfismos internos es isomorfo a $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, la cardinalidad del grupo de automorfismos externos cumple que

$$|\mathrm{Out}_{\mathcal{F}_{M_{12}}}(S)| = |\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_{M_{12}}}(S)|/|\mathrm{Inn}(S)| = 36/9 = 4,$$

dejando claro que $\mathrm{Out}_{\mathcal{F}_{M_{12}}}(S)$ no tiene 3-subgrupos normales y por tanto S es radical.

Otra cuestión importante es el concepto de *subgrupos esenciales*, los cuales ayudan a reducir la información necesaria para obtener todo el sistema de fusión original del que proviene.

Para ello, se requiere del concepto de *fuertemente encajado*:

Definición 2.24. Dado un grupo finito G y un subgrupo propio $H \leq G$, se tiene que H está fuertemente p-encajado si p divide a $|H|$ y para todo $x \in G - H$, el orden de $H \cap H^x$ no es divisible por p.

Definición 2.25. Dado un p-grupo S, un subgrupo $Q \leq S$ es *esencial* en $\mathcal{F}$ si es $\mathcal{F}$-céntrico y $\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q)$ tiene un subgrupo que esté fuertemente p-encajado.

Claramente si un subgrupo P es esencial, implica que debe ser céntrico, y dado que el subgrupo $\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(P)$ debe contener un subgrupo fuertemente p-encajado, necesariamente ningún p-subgrupo $H \leq \mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(P)$ puede cumplir que sea normal, dado que al conjugarse con cualquier elemento de $G - H$, p dividirá a $|H \cap {}^x H|$, por lo que todo subgrupo que sea esencial deberá ser también radical.

Lema 2.26. Dado un sistema de fusión saturado basado en un p-grupo S, se tiene que S no es esencial.

Prueba. Un p-grupo P es totalmente normalizado si $|N_S(P)| \geq |N_S(P')|$ para todo $P \cong_{\mathcal{F}} P'$. Como S es únicamente $\mathcal{F}$-conjugado con él mismo, necesariamente S es totalmente normalizado. Dado que es totalmente normalizado, el primer axioma de saturación afirma que $\mathrm{Aut}_S(S) \in \mathrm{Syl}_p(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(S))$, y como $\mathrm{Aut}_S(S) = \mathrm{Inn}(S)$, tendremos que

$$p \not| \frac{|\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(S)|}{|\mathrm{Inn}(S)|} = \left| \frac{\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(S)}{\mathrm{Inn}(S)} \right| = |\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(S)|.$$

De lo anterior, no existen subgrupos $H \leq \mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(S)$ tales que $p|\ |H|$. Por lo tanto no pueden existir subgrupos p-encajados en $\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(S)$. Consecuentemente S no es esencial. $\square$

Ejemplo 2.27. Considerando el grupo M_{12} y nuevamente como referencia al 3-subgrupo de Sylow $S = UT(3,3)$, usando la información de los ejemplos 2.19 y 2.23, como los subgrupos esenciales deben cumplir que sean céntricos y radicales, los subgrupos candidatos a esenciales se encuentran en la intersección de estos dos conjuntos, es decir, sólo pueden ser esenciales S, Q_1 ó Q_2.

Por el lema 2.26, S no puede ser esencial, dado que hablamos del sistema de fusión de un grupo y por tanto de un sistema de fusión saturado.

Dado que los automorfismos externos de Q_1 y Q_2 son isomorfos a $GL_2(\mathbb{F}_3)$, sólo requerimos saber si $GL(\mathbb{F}_3)$ tiene un subgrupo que sean fuertemente 3-encajado.

Para ello, consideremos un 3-Sylow de $GL_2(\mathbb{F}_3)$. Como queremos que el grupo H sea de orden divisible entre 3, pero el orden de $H \cap {}^x H$ no, necesitamos un subgrupo de $GL_2(\mathbb{F}_3)$ tal que al conjugarlo con algún $x \in GL_2(\mathbb{F}_3) - H$, no pueda dar por resultado algún 3-grupo de H. Consideremos el 3-Sylow

$$K = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

y consideremos el grupo H de orden 12 generado por

$$H = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Claramente $K \trianglelefteq H$, ya que

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

al igual que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2.$

Claramente el normalizador de K no puede ser de orden mayor. No puede ser de orden 48 pues sería todo el grupo $GL_2(\mathbb{F}_3)$, y la matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ no normaliza a K:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por otra parte, tampoco el normalizador puede ser de orden 24, pues implicaría que sea el único subgrupo de éste orden en $GL_2(\mathbb{F}_3)$, que es $SL_2(\mathbb{F}_3)$, el grupo de matrices invertibles de determinante 1, pero esto implicaría que la matriz $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ normalizara a K, lo cual claramente no es cierto:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto el normalizador de K es H, y es claro que éste H es 3-encajado. Como H tiene orden 12 y K es normal en H, el único 3-subgrupo de H es K, por lo que al conjugar a H con cualquier elemento $x \in GL_2(\mathbb{F}_3) - H$, al no ser ningún x del normalizador de K, ningún elemento normalizará a K, por lo que $H \cap {}^xH$ será un grupo de orden primo relativo a 3, dejando así que ambos Q_i deben ser esenciales.

Luego entonces la subcategoría de subgrupos esenciales está simplemente compuesta por Q_1 y Q_2.

$$Q_1 \qquad\qquad Q_2,$$

Donde en este caso, los únicos morfismos necesarios son los automorfismos de cada Q_i, ya que no existe ningún morfismo en M_{12} que los haga conjugados entre sí.

Dado que el hecho de que un subgrupo sea esencial implica que sea también radical y céntrico, cabe la posibilidad de confundir que un subgrupo céntrico y radical termine siendo esencial. Es por ello la motivación del siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.28. Un grupo *maximal parabólico* $P^{(m,n)}$ es un grupo de matrices de la forma

$$P^{(m,n)} = \begin{pmatrix} GL_m(K) & M_{m,n}(K) \\ 0 & GL_n(K) \end{pmatrix},$$

donde K es un campo de cualquier característica, $M_{m,n}(K)$ es el grupo aditivo de matrices de tamaño $m \times n$ con entradas en el campo K y $GL_n(K)$ el grupo multiplicativo de matrices invertibles de tamaño n con entradas en K. Definiremos por $U_{P^{(m,n)}}$ al subgrupo unipotente radical † de $P^{(m,n)}$ como el grupo de matrices de la forma

$$U_{P(m,n)} = \begin{pmatrix} I_m & M_{m,n}(K) \\ 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

Haciendo las cuentas necesarias, es claro que $U_{P(m,n)} \trianglelefteq P^{(m,n)}$, puesto que para todo elemento en $P^{(m,n)}$ se tiene que, considerando $A \in GL_m(K)$, $B \in GL_n(K)$ y matrices $M, N \in M_{m,n}(K)$.

$$\begin{pmatrix} B & M \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & N \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^{-1} & -B^{-1}MA^{-1} \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & BNA^{-1} \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \in U.$$

Por tanto, podemos hablar de P/U como grupo. Si consideramos $P := P^{(3,1)}$ y a $U := U_P$, dado que la última fila de todo elemento de U es de la forma $(0\ 0\ 0\ 1)$ y la última columna es de la forma $(V\ \ 1)^T$ con $V \in M_{3,1}(\mathbb{F}_2)$, toda matriz representante $\overline{L}$ de P/U puede verse como una matriz de la forma

$$\overline{L} = \overline{\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}},$$

donde $Q \in GL_3(\mathbb{F}_2)$. Como consecuencia, podemos establecer que $P/U \cong GL_3(\mathbb{F}_2)$ bajo el isomorfismo $\overline{L} \mapsto Q$.

Consideremos el sistema de fusión relativo a P basado en un 2-Sylow S. Como el orden de P es

$$|GL_3(\mathbb{F}_2)| \times |M_{3,1}(\mathbb{F}_2)| \times |GL_1(\mathbb{F}_2)| = 168 \times 8 \times 1 = 1344 = 2^6 \times 21$$

Tendremos que $|S| = 64$†. De forma similar a la operación anterior, podemos obtener que el orden de U es 8. Una vista rápida a la conjugación dada para la normalidad de U en P nos

†Una matriz unipotente es una matriz cuadrada cuyo polinomio característico es de la forma $(x-1)^n$ donde n sea la dimensión de la matriz. En la literatura, un grupo de matrices *unipotente radical* U es el subgrupo normal más grande de un grupo de matrices M que consiste de elementos unipotentes. El grupo unipotente radical definido aquí cumple ésta condición pero no la requerimos para los fines del ejemplo, por lo que no se probarán estas propiedades.

†Computacionalmente podemos obtener que $S \cong UT(4,2)$, el grupo de matrices triangulares superiores de dimensión cuatro con coeficientes en $\mathbb{F}_2$.

deja claro que para que un elemento en P centralice a los elementos de U, debe ocurrir que para la matriz en cuestión cumpla que $BNA^{-1} = N$:

$$\begin{pmatrix} B & M \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_3 & N \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^{-1} & -B^{-1}MA^{-1} \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_3 & BNA^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_3 & N \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Necesariamente $A = [1]$, pues es la única manera de que A sea un bloque de una matriz en $GL_4(\mathbb{F}_2)$ (de otra forma la matriz tendría determinante cero). Luego, la única matriz tal que $BN = N$ para toda $N \in M_{3,1}(\mathbb{F}_2)$ debe ser $B = I_3$, por tanto las únicas matrices que centralizan a los elementos en U son justamente las matrices en U. En consecuencia $C_P(U) = U$. Como U es normal en P, el único U' P-conjugado a U es $U' = U$, por tanto U es céntrico.

Por otra parte, como U es abeliano (esto puede verse debido a que $U \cong M_{3,1}(\mathbb{F}_2)$ con la operación de suma, asignando a cada matriz de U su esquina superior derecha en $M_{3,1}(\mathbb{F}_2)$), $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_{S(P)}}(U) = \mathrm{Out}_{\mathcal{F}_{S(P)}}(U)$. Por la primera ecuación de este ejemplo, $U \trianglelefteq P$, y

$$\mathrm{Out}_{\mathcal{F}_{S(P)}}(U) \cong N_P(U)/C_P(U) = P/U \cong GL_3(\mathbb{F}_2).$$

Es sabido que $\mathbb{G} = GL_3(\mathbb{F}_2)$ tiene orden $168 = 2^3 \times 3 \times 7$. Para verificar si $\mathbb{G}$ contiene algún 2-subgrupo normal (para verificar si U es radical), dado que todo 2-Sylow es conjugado con los demás, podemos, sin pérdida de generalidad considerar el 2-subgrupo

$$A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Claramente $A \cong D_8$. Si un 2-grupo es normal en $\mathbb{G}$, debe ser normal en el 2-Sylow que lo contenga, por tanto los únicos subgrupos que pueden ser normales en $\mathbb{G}$ son el centro de A, o los subgrupos de orden 4 y 8 en D_8. Si consideramos la matriz

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

es claro que pertenece al centro de A y a todos los subgrupos de orden 4 de A. Por tanto, si un 2-grupo de S es normal en $\mathbb{G}$, entonces debe cumplirse que al conjugar Q por cualquier elemento de $\mathbb{G}$, el nuevo elemento siga en A. Notemos que si conjugamos Q por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

la matriz obtenida será

$$MQM^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

la cual no está en A, y por tanto al conjugar cualquier subgrupo de A, ninguno podrá ser normal en $\mathbb{G}$, ya que todos los candidatos a 2-subgrupos de A para ser normales en $\mathbb{G}$ contienen a Q y M no conjuga a Q en A, haciendo imposible que exista un 2-grupo tal que sea normal en $\mathbb{G}$, implicando que así U sea radical.

Para verificar que $\mathbb{G}$ no tiene subgrupos fuertemente 2-encajados, supongamos por contradicción que existe un subgrupo $H \leq \mathbb{G}$ que sí lo sea. Si H es fuertemente 2-encajado, es necesario que tenga orden divisible entre 2 y contenga al normalizador de sus 2-grupos para evitar que al considerar un elemento x en el normalizador de alguno de ellos, 2 divida al orden de $H \cap {}^{x}H$.

Bajo la suposición anterior, veamos que si $C \in \mathrm{Syl}_2(H)$, se tendrá que $C \in \mathrm{Syl}_2(\mathbb{G})$. De no ser cierto, entonces $|C| < |C'|$ para los $C' \in \mathrm{Syl}_2(\mathbb{G})$. Por los teoremas de Sylow existirá un 2-grupo $\mathbb{A} \leq \mathbb{G}$ tal que $C \trianglelefteq \mathbb{A}$ donde el orden C será estrictamente menor al de $\mathbb{A}$. Como por hipótesis deseamos un grupo H tal que contenga al normalizador de sus 2-grupos, entonces $N_{\mathbb{G}}(C) \leq H$, entonces $\mathbb{A} \leq H$, contradiciendo la definición de subgrupo de Sylow, pues $|C| < |\mathbb{A}|$. Por tanto, si $C \in \mathrm{Syl}_2(H)$ entonces está en $\mathrm{Syl}_2(\mathbb{G})$.

Como para cualquier $x \in \mathbb{G}$ es claro que xHx^{-1} es un grupo, la intersección $H \cap {}^{x}H$ también lo será. Si es posible obtener un elemento de orden 2 en $H \cap {}^{x}H$, automáticamente el grupo será de orden divisible entre 2.

Es claro que aún conteniendo al normalizador del 2-Sylow A descrito anteriormente, es necesario contener todos los elementos tales que al conjugar A con éste den un subgrupo de orden divisible entre 2. Notemos que las matrices de A son de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{x}_1 & \mathrm{x}_2 \\ 0 & 1 & \mathrm{x}_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde cada x_i puede ser 0 ó 1. Veamos que las matrices de $GL_3(\mathbb{F}_2)$ que sí cumplirán que 2 dividirá al orden de $A \cap {}^{x}A$ son

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

las cuales propiciarán que existan elementos de orden 2 en $A \cap {}^{x}A$, implicando que 2 divida al orden de la intersección $A \cap {}^{x}A$. Por tanto H debe contener ambos a y b. Esto implica que $H = \langle A, a, b\rangle$, lo que fuerza a que $H = GL_3(\mathbb{F}_2)$ (pues el orden de a es 3 y el de b es 7). De esto, se implica que no existan subgrupos fuertemente 2-encajados, concluyendo que U no será esencial.

Por lo tanto, en el sistema de fusión $\mathcal{F}_U(P)$, se tiene que U es un subgrupo céntrico y radical, pero no esencial.

Dado que los sistemas de fusión se componen de objetos con diferentes características, es apropiado ver cómo los conceptos se materializan bajo un ejemplo desarrollado de forma completa y apreciar las características de los diferentes tipos de objetos.

Ejemplo 2.29. Sea $G = S_4$, el grupo de permutaciones de 4 elementos, y sea S un 2-Sylow de G. Obtendremos $\mathcal{F}_S(S_4)$. Como $|S_4| = 4! = 24$, entonces si $S \in \mathrm{Syl}_2(S_4)$, se tendrá que $|S| = 8$.

Consideremos entonces el 2-Sylow S generado por los elementos $\alpha = (1, 3, 2, 4)$ y $\beta = (1, 2)$. Claramente este grupo es isomorfo a un grupo diédrico de orden 8, D_8. Primero notemos todos los elementos de S viéndolos como productos de α y de β considerando que $\alpha\beta = \beta\alpha^{-1}$:

Elemento	$(1,2)$	$(3,4)$	$(1,2)(3,4)$	$(1,3)(2,4)$	$(1,4)(2,3)$	$(1,3,2,4)$	$(1,4,2,3)$
Nombre	β	$\alpha^2\beta$	α^2	$\alpha\beta$	$\alpha^3\beta$	α	α^3
Orden	2	2	2	2	2	4	4

Claramente no hay elementos de orden 8, pues todos los 2-grupos de Sylow son isomorfos, y de existir un elemento así en S_4, se tendría que $D_8 \cong \mathbb{Z}_8$, lo cual no es cierto. Para obtener los subgrupos de S, veamos que por cada elemento de orden 2, existe un 2-subgrupo de orden 2, por lo que en total son cinco 2-grupos de orden 2.

Para obtener los 2-subgrupos de orden 4, estos serán isomorfos a $\mathbb{Z}_4$ o a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Claramente sólo hay un grupo de orden 4 isomorfo a $\mathbb{Z}_4$, que es $\langle \alpha \rangle$ pues $\alpha^3 \in \langle \alpha \rangle$. Por otra parte los otros 2-grupos de orden 4 son $\langle \alpha^2, \beta \rangle$ y $\langle \alpha^2, \alpha\beta \rangle$.

Para obtener el sistema de fusión $\mathcal{F}_S(S_4)$ con toda la información que lo compone, se requieren del normalizador y centralizador de cada subgrupo. Se denotará por P_i a los subgrupos de orden 2 donde i sea el generador, es decir, $P_{\alpha^2\beta}$, P_β, P_{α^2}, $P_{\alpha\beta}$, y $P_{\alpha^3\beta}$, y por Q_i a los subgrupos de orden 4 donde i será el elemento generador distinto de α^2, es decir, Q_β, Q_α y $Q_{\alpha\beta}$.

Como $|S| \leq |N_{S_4}(S)|$, entonces $|N_{S_4}(S)| = 8$ ó 24. Como $(1,2,3)$ no normaliza a S, ya que $(1,2,3)(1,2)(1,3,2) = (1,3)$, el cual no está en S, es claro que $N_{S_4}(S)$ no puede ser de orden 24, y por tanto no puede ser S_4. Luego, es de orden 8. De lo anterior, también se deduce que el centralizador de S en S_4 es $\langle \alpha^2 \rangle$, pues el centralizador debe estar contenido en $N_{S_4}(S)$. Por tanto

$$\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_S(S_4)}(S) \cong S/\langle \alpha^2 \rangle = \langle \alpha, \beta | \alpha^2 = \beta^2 = 1, \alpha\beta = \beta\alpha \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

Para obtener los normalizadores de los subgrupos Q_i, es claro que al ser de índice 2 sobre S, entonces $S \subseteq N_{S_4}(Q_i)$ y por tanto sus normalizadores son de orden 8 ó 24. Dado que al conjugar el elemento $(1,2,3)$ con α^2 se obtiene $(1,2,3) \cdot \alpha^2 \cdot (1,3,2) = (1,3)(2,4) \notin S$, entonces $N_{S_4}(Q_{\alpha^2\beta}) = N_{S_4}(Q_\beta) = S$. Sin embargo, podemos ver que todo elemento en S_4 normalizará a $Q_{\alpha\beta}$, por tanto $N_{S_4}(Q_{\alpha\beta}) = S_4$. Como cada Q_i es abeliano y S no lo es, queda claro que para los $i \neq \alpha\beta$ que $C_{S_4}(Q_i) = Q_i$, por tanto

$$\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_S(S_4)}(Q_i) \cong S/Q_i \cong \mathbb{Z}_2$$

y para $Q_{\alpha\beta}$, se tiene que

$$\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_S(S_4)}(Q_{\alpha\beta}) \cong S_4/Q_{\alpha\beta} \cong S_3.$$

Para los P_i, notemos que para cualquier elemento de orden 2, $(2,3,4) \cdot P_i \cdot (2,4,3) \nleq S$, por lo que el normalizador de estos no puede ser de orden 24 (pues sería todo S_4), por lo que deberá ser de orden potencia de 2. Por otra parte, cada subgrupo es de índice 2 en los Q_i que los contienen, por lo que sus normalizadores son de orden 4 u 8. Notemos que en S_4 hay dos 2-Sylow más distintos del que estamos considerando. Cada uno es generado por $\langle(1,2,3,4),(2,4)\rangle$ y por $\langle(1,4,2,3),(4,3)\rangle$, es fácil ver que $\alpha\beta$ y $\alpha^3\beta$ son los centros de cada uno respectivamente. Por tanto, los 3-grupos P_{α^2}, $P_{\alpha\beta}$ y $P_{\alpha^3\beta}$ tienen normalizador isomorfo a un D_8.

Para los subgrupos $P_{\alpha^2\beta}$ y P_β, sus normalizadores pueden ser subgrupos de orden 4 u 8. Si fueran de orden 8, significaría que fueran normales en algún D_8 contenido en S_4, lo cual sería afirmar que conmutan con todos lo elementos de un D_8. Esto último implicaría que sean centros de un 2-grupo isomorfo a D_8 en S_4, pero esto no puede suceder porque ya son conocidos todos los D_8 en S_4 y sus respectivos centros. Por tanto los normalizadores de los 2-grupos $P_{\alpha^2\beta}$ y P_β es el 2-grupo $\langle\alpha^2,\beta\rangle = Q_\beta$.

Para obtener los centralizadores, es claro que para los Q_i, ellos mismos son abelianos, y que D_8 no, por tanto, como sus centralizadores son de orden menor a sus normalizadores, sus centralizadores son los mismos Q_i. Para los P_i, los centralizadores de los subgrupos $P_{\alpha^2\beta}$ y P_β son su normalizador, dado que éste es un grupo abeliano, y no pueden ser el centro de otro subgrupo D_8, dado que éstos son los otros tres subgrupos de orden 2. Por tanto, los centralizadores de $P_{\alpha^2\beta}$ y P_β son de orden 4 y los de los demás P_i de orden 8. De todas formas tendremos que para P_i con $i = \alpha^2, \alpha\beta$ o $\alpha^3\beta$

$$\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_S(S_4)}(P_i) \cong D_8/D_8 \cong 1,$$

y para $i = \alpha^2\beta$ o β se tendrá que

$$|\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_S(S_4)}(P_i)| = |N_{S_4}(P_i)|/|C_{S_4}(P_i)| = Q_\beta/Q_\beta = 1$$

dejando claro que $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_S(S_4)}(P_i) = 1$. Con estos automorfismos, ya es posible exponer la información para representar el diagrama del sistema de fusión relativo a S_4 basado en S (sin los automorfismos representados en el diagrama para cada subgrupo):

$$\begin{tikzcd}
& & \langle\alpha,\beta\rangle & & \\
& \langle\alpha^2,\beta\rangle \arrow[ur] & \langle\alpha\rangle \arrow[u] & \langle\alpha^2,\alpha\beta\rangle \arrow[ul] & \\
\langle\alpha^2\beta\rangle \arrow[ur] \arrow[r, leftrightarrow] & \langle\beta\rangle \arrow[u] & \langle\alpha^2\rangle \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] \arrow[r, leftrightarrow] & \langle\alpha\beta\rangle \arrow[u] \arrow[r, leftrightarrow] & \langle\alpha^3\beta\rangle \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

y los automorfismos de cada subgrupo son:

Subgrupo	$P_{\alpha^2\beta}$	P_β	P_{α^2}	$P_{\alpha\beta}$	$P_{\alpha^3\beta}$	$Q_{\alpha\beta}$	Q_β	Q_α	D_8
Normalizador en S_4	Q_β	Q_β	D_8	D_8	D_8	S_4	D_8	D_8	D_8
Centralizador en S_4	Q_β	Q_β	D_8	D_8	D_8	$Q_{\alpha\beta}$	Q_β	Q_α	P_α
G. de automorfismos	1	1	1	1	1	S_3	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	K_4

donde K_4 es el 4-grupo de Klein. Es claro que los grupos P_{α^2}, $P_{\alpha\beta}$ y $P_{\alpha^3\beta}$ son conjugados entre sí dado que son los centros de los 3-subgrupos de Sylow de S_4. Por otra parte, $P_{\alpha^2\beta} \cong_{\mathcal{F}_S(S_4)} P_\beta$ a través de la conjugación por el elemento $(1,3)(2,4)$.

Totalmente normalizados

Ahora, los subgrupos totalmente normalizados son aquellos $H \leq S$ tales que $|N_S(H)| \geq |N_S(H')|$ para todo $H' \cong_{\mathcal{F}_S(S_4)} H$. Es claro que al ser los tres Q_i no conjugados entre ellos, los tres serán totalmente normalizados. De forma parecida S es totalmente normalizado por unicidad entre sus conjugados.

Como para P_{α^2} su normalizador es de orden 8 pues es el centro de S y el de sus conjugados es de orden 4, éste es el único subgrupo totalmente normalizado de ésta clase de conjugación. Por otro lado, tanto $P_{\alpha^2\beta}$ como P_β son totalmente normalizados, pues ambos tienen el mismo normalizador. Por tanto, el diagrama de subgrupos totalmente normalizados del sistema de fusión es

$$
\begin{tikzcd}
 & & \langle \alpha, \beta \rangle & \\
 & \langle \alpha^2, \beta \rangle \arrow[ur] & \langle \alpha \rangle \arrow[u] & \langle \alpha^2, \alpha\beta \rangle \arrow[ul] \\
\langle \alpha^2\beta \rangle \arrow[ur] \arrow[r, leftrightarrow] & \langle \beta \rangle \arrow[u] & \langle \alpha^2 \rangle \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Totalmente centralizado

Para hallar los subgrupos totalmente centralizados, el teorema 2.16 afirma que todo sistema de fusión relativo a un grupo es saturado. En un sistema de fusión saturado, la primera condición afirma que si un subgrupo es totalmente normalizado, se ve obligado a ser también totalmente centralizado. Por tanto, todos los subgrupos totalmente normalizados están en esta subcategoría. Sin embargo, queda verificar si $P_{\alpha\beta}$ y $P_{\alpha^3\beta}$ son totalmente centralizados. Como ambos $P_{\alpha\beta}$ y $P_{\alpha^3\beta}$ no son centros de S, sus centralizadores en S son de orden menor a 8 y como están conjugados con P_{α^2}, el cual su centralizador es S, se cumple que

$$|C_S(P_{\alpha^2})| > |C_S(P_{\alpha\beta})|, |C_S(P_{\alpha^3\beta})|.$$

Por lo que implicará que ninguno de los dos sea totalmente centralizado. Por tanto, el diagrama del sistema de fusión con subgrupos totalmente centralizados será el mismo que el de subgrupos totalmente normalizados.

Céntricos

Para hallar los subgrupos céntricos en S, es necesario ver que si un subgrupo es candidato a ser céntrico, los conjugados a éste también lo sean, aunque por otra parte, es posible descartar los subgrupos candidatos viendo si alguno de sus conjugados no cumple la condición de los subgrupos céntricos. En este caso, dado que cada P_i está contenido en un Q_i y estos son abelianos, el centralizador de cada P_i es de cardinalidad mayor a P_i, por tanto ningún P_i será céntrico. Por otro lado, cada Q_i sí lo será dado que su centralizador es él mismo, y únicamente es conjugado consigo mismo, dejando claro que éstos sean céntricos.

$$\begin{tikzcd}
 & \langle \alpha, \beta \rangle & \\
\langle \alpha^2, \beta \rangle \arrow[ur] & \langle \alpha \rangle \arrow[u] & \langle \alpha^2, \alpha\beta \rangle \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Radicales

Para obtener los subgrupos radicales del sistema de fusión, se requiere obtener los automorfismos internos de cada Q_i, P_i y S, sin embargo todos son abelianos, por lo que sus automorfismos internos son únicamente la identidad. Luego para cada H que sea subgrupo propio de S se tendrá que $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_S(S_4)}(H) \cong \mathrm{Out}_{\mathcal{F}_S(S_4)}(H)$.

Como para todo $H \neq Q_{\alpha\beta}$ sus grupos de automorfismos externos son abelianos sólo requerimos ver si la cardinalidad de sus automorfismos es divisible entre 2. Como los grupos de automorfismos externos de los P_i son triviales, no pueden ser 2-reducidos, luego todo P_i es radical.

Para los Q_i con $i \neq \alpha\beta$, como sus normalizadores son de orden 8 y sus centralizadores son ellos mismos, sus automorfismos externos son de orden 2. Luego entonces $\mathrm{Out}_{\mathcal{F}_S(S_4)}(Q_i)$ contiene a un 2-grupo normal no trivial (él mismo), por lo que los Q_i tales que $i \neq \alpha\beta$ no son radicales.

Para el caso de $Q_{\alpha\beta}$ con su grupo de automorfismos isomorfo a S_3, se tiene que ningún 2-grupo es normal en S_3, por lo que $Q_{\alpha\beta}$ sí será radical.

Para S, como su grupo de automorfismos externos es el trivial, por tanto es 2-reducido implicando que S sea radical. En consecuencia, el diagrama de los subgrupos radicales queda dado por:

$$\begin{tikzcd}
 & & \langle \alpha, \beta \rangle & & \\
 & & & \langle \alpha^2, \alpha\beta \rangle \arrow[ul] & \\
\langle \alpha^2\beta \rangle \arrow[uurr] \arrow[r, leftrightarrow] & \langle \beta \rangle \arrow[uur] & \langle \alpha^2 \rangle \arrow[ur] \arrow[r, leftrightarrow] & \langle \alpha\beta \rangle \arrow[u] \arrow[r, leftrightarrow] & \langle \alpha^3\beta \rangle \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

donde los automorfismos son los correspondientes en la tabla.

Esenciales

Como los subgrupos esenciales deben cumplir que sean radicales y céntricos para ser candidatos a esenciales, sólo nos fijaremos en los subgrupos que cumplan estos dos requisitos.

Por tanto, los únicos subgrupos que nos interesarán son $Q_{\alpha\beta}$ y S. Por el lema 2.26, S no podrá ser esencial, por tanto sólo falta considerar a $Q_{\alpha\beta}$.

Para $Q_{\alpha\beta}$, su grupo de automorfismos es S_3, donde el único candidato a subgrupo 2-encajado es un subgrupo de orden 2. Considerando el subgrupo $H = \langle(1,2)\rangle$, una revisión rápida nos hace ver que no existe $x \in S_3 - H$ tal que 2 divida a $|H \cap {}^xH|$, dejando claro que H es 2-encajado, y por tanto $Q_{\alpha\beta}$ es esencial. Por tanto, el único subgrupo esencial en el diagrama es $Q_{\alpha\beta}$.

$$\langle\alpha\beta\rangle.$$

El motivo de la extensión de este ejemplo es dejar en claro la complejidad que tiene abarcar todos los tipos de subgrupos que puede contener un grupo en específico.

2.3 El teorema de fusión de Alperin en sistemas de fusión saturados

Uno de los temas importantes a abarcar en esta tesis es cómo se interpreta el teorema de Alperin para sistemas de fusión saturados, para generalizarlo para un sistema de acción de fusión. Es por ello que es preciso observar el resultado para sistemas de fusión, sin embargo, para su prueba son necesarias ciertas propiedades previas de sistemas de fusión.

Definición 2.30. Dado un sistema de fusión $\mathcal{F}$ basado en un p-grupo S, para todo subgrupo

$P \leq S$ y todo grupo de automorfismos $K \leq \mathrm{Aut}(P)$, se definen los siguientes conjuntos:

$$\mathrm{Aut}^K_{\mathcal{F}}(P) = K \cap \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(P) \qquad\qquad \mathrm{Aut}^K_S(P) = K \cap \mathrm{Aut}_S(P)$$

Y se define el K-normalizador de P en S como el subgrupo

$$N^K_S(P) := \{x \in N_S(P) \mid c_x \in K\}.$$

En particular, tenemos que $N_S^{\mathrm{Aut}_S(P)}(P) = N_S(P)$, el normalizador de P, y $N_S^{\{id\}}(P) = C_S(P)$, el centralizador de P. Del concepto de K-normalizador, se obtiene la siguiente definición:

Definición 2.31. Dado un sistema de fusión $\mathcal{F}$ basado en S, para cualquier $P \leq S$ y cualquier $K \leq \mathrm{Aut}(P)$, se dice que P es *totalmente K-normalizado en $\mathcal{F}$* si $|N^K_S(P)| \geq |N_S^{\varphi K \varphi^{-1}}(\varphi(P))|$ para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P, S)$.

Teorema 2.32. *Dado un sistema de fusión $\mathcal{F}$ saturado basado en un p-grupo S, fijemos $P \leq S$ y $K \leq \mathrm{Aut}(P)$, entonces se cumple lo siguiente:*

- *Hay un subgrupo $P' \leq S$ y un isomorfismo $\varphi \in Iso_{\mathcal{F}}(P, P')$ tal que P' es totalmente centralizado en $\mathcal{F}$ y*

$$\mathrm{Aut}_S^{\varphi K \varphi^{-1}}(P') \in \mathrm{Syl}_p(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}^{\varphi K \varphi^{-1}}(P')).$$

- *P es totalmente K-normalizado en $\mathcal{F}$ si y sólo si P es totalmente centralizado en $\mathcal{F}$ y*

$$\mathrm{Aut}^K_S(P) \in \mathrm{Syl}_p(\mathrm{Aut}^K_S(P))$$

- *Fijado $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P, S)$, definiendo $P' = \varphi(P)$ y $K' = \varphi K \varphi^{-1}$, si P' es totalmente K'-normalizado en $\mathcal{F}$, entonces existen homomorfismos $\overline{\varphi} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(N^K_S(P) \cdot P, S)$ y $\chi \in K$ tal que $\overline{\varphi}|_P = \varphi \circ \chi$.*

Prueba. Para probar el primer inciso, escogemos un $\varphi_0 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P, S)$ tal que $P' = \varphi_0(P)$ es totalmente normalizado. Luego, por ser un sistema de fusión saturado, P' es totalmente centralizado y $\mathrm{Aut}_S(P') \in \mathrm{Syl}_p(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(P'))$. Es claro que $\varphi_0 \mathrm{Aut}_S^K(P)\varphi_0^{-1} \leq \varphi_0 \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}^K(P)\varphi_0^{-1}$, ya que

$$\begin{aligned} \mathrm{Aut}_S(P) &\leq \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(P) \\ \Rightarrow \mathrm{Aut}_S^K(P) = K \cap \mathrm{Aut}_S(P) &\leq K \cap \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(P) = \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}^K(P) \\ \Rightarrow \varphi_0 \mathrm{Aut}_S^K(P)\varphi_0^{-1} &\leq \varphi_0 \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}^K(P)\varphi_0^{-1}. \end{aligned}$$

Como $\mathrm{Aut}_S^K(P)$ es un subgrupo de $\mathrm{Aut}_S(P)$, que es un p-grupo, entonces $\varphi_0 \mathrm{Aut}_S^K(P)\varphi_0^{-1}$ es un p-grupo. Como es un p-grupo, significa que existe un p-subgrupo de Sylow $\mathbb{S}$ de $\varphi_0 \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}^K(P)\varphi_0^{-1}$ tal que $\varphi_0 \mathrm{Aut}_S^K(P)\varphi_0^{-1} \leq \mathbb{S}$. Como tenemos la siguiente contención:

$$\mathbb{S} \leq \varphi_0 \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}^K(P)\varphi_0^{-1} \leq \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(P'),$$

significa que $\mathbb{S}$ es un p-subgrupo de $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(P')$. Sea A un p-Sylow de $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(P')$ que contiene a $\mathbb{S}$. Aplicando el primer teorema de Sylow, existe $\alpha \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(P')$ tal que $\alpha A \alpha^{-1} \leq \mathrm{Aut}_S(P')$ (pues es un p-Sylow por hipótesis), dejando implícito que $\varphi_0 \mathrm{Aut}_S^K(P)\varphi_0^{-1} \leq \alpha^{-1}\mathrm{Aut}_S(P')\alpha$. Esto afirma que

$$\varphi_0 \mathrm{Aut}_S^K(P)\varphi_0^{-1} \leq (\alpha^{-1}\mathrm{Aut}_S(P')\alpha) \cap (\varphi_0 \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}^K(P)\varphi_0^{-1}) = \mathbb{S},$$

por lo que el lado derecho de la ecuación es un p-subgrupo de Sylow de $\varphi_0 \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}^K(P)\varphi_0^{-1}$.

Ahora, es claro que, como

$$\mathrm{Aut}_S^{\varphi_0 K \varphi_0^{-1}}(P') = \mathrm{Aut}_S(P') \cap \varphi_0 K \varphi_0^{-1} = (\mathrm{Aut}_S(P') \cap \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(P')) \cap \varphi_0 K \varphi_0^{-1},$$

y al ser $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(P') \cap \varphi_0 K \varphi_0^{-1} = \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}^{\varphi_0 K \varphi_0^{-1}}(P')$,

$$\mathrm{Aut}_S(P') \cap \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}^{\varphi_0 K \varphi_0^{-1}}(P') = \mathrm{Aut}_S(P') \cap \varphi_0 \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}^K(P)\varphi_0^{-1}.$$

Por tanto, usando la afirmación anterior y conjugando con α, tendremos:

$$\alpha\varphi_0 \mathrm{Aut}_S^K(P)\varphi_0^{-1}\alpha^{-1} = \mathrm{Aut}_S(P') \cap \alpha(\varphi_0 \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}^K(P)\varphi_0^{-1})\alpha.$$

Haciendo $\varphi = \alpha\varphi_0$, es equivalente a afirmar que

$$\mathrm{Aut}_S^{\varphi K \varphi^{-1}}(P') \in \mathrm{Syl}_p(\varphi \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}^K(P)\varphi^{-1}) = \mathrm{Syl}_p(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}^{\varphi K \varphi^{-1}}(P')).$$

Para probar el segundo inciso, si P es totalmente centralizado en $\mathcal{F}$, entonces para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P,S)$, tenemos que $|C_S(P)| \geq |C_S(\varphi(P))|$. Si además P es tal que $\mathrm{Aut}_S^K(P) \in \mathrm{Syl}_p(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}^K(P))$, se cumple que $|\mathrm{Aut}_S^K(P)| \geq |\mathrm{Aut}_S^{\varphi K \varphi^{-1}}(\varphi(P))|$, ya que hay una correspondencia biyectiva entre $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}^K(P)$ y $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}^{\varphi K \varphi^{-1}}(\varphi(P))$. Por lo tanto tenemos que:

$$|N_S^K(P)| = |C_S(P)| \cdot |\mathrm{Aut}_S^K(P)| \geq |C_S(\varphi(P))| \cdot |\mathrm{Aut}_S^{\varphi K \varphi^{-1}}(\varphi(P))| = |N_S^{\varphi K \varphi^{-1}}(\varphi(P))|,$$

y así es claro que P es totalmente K-normalizado en $\mathcal{F}$.

De la misma forma, si P es totalmente K-normalizado en $\mathcal{F}$, por la primera parte del teorema existe un homomorfismo $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P,S)$ tal que $\varphi(P)$ es totalmente centralizado en $\mathcal{F}$, y

$$\mathrm{Aut}_S^{\varphi K \varphi^{-1}}(\varphi(P)) \in \mathrm{Syl}_p(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}^{\varphi K \varphi^{-1}}(\varphi(P))),$$

entonces

$$|N_S^K(P)| \geq |N_S^{\varphi K \varphi^{-1}}(\varphi(P))|,$$

que es equivalente a:

$$|C_S(P)| \cdot |\mathrm{Aut}_S^K(P)| \geq |C_S(\varphi(P))| \cdot |\mathrm{Aut}_S^{\varphi K \varphi - 1}(\varphi(P))|.$$

Pero como ambos subgrupos en el lado derecho son p-subgrupos de Sylow, se tiene que:

$$|C_S(P)| \leq |C_S(\varphi(P))| \qquad \text{y} \qquad |\mathrm{Aut}_S^K(P)| \leq |\mathrm{Aut}_S^K(\varphi(P))|.$$

Entonces la desigualdad anterior entre el producto de ellas sólo puede ocurrir si son iguales las desigualdades entre centralizadores y grupos de automorfismos, entonces $|C_S(P)| = |C_S(\varphi(P))|$ y $|\mathrm{Aut}_S^K(P)| = |\mathrm{Aut}_S^K(\varphi(P))|$, y con esto es claro que P es totalmente centralizado y $\mathrm{Aut}_S^K(P) \in \mathrm{Syl}_p(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}^K(P))$.

Para probar el tercer inciso, primeramente probaremos que si un p-grupo $Q \leq S$ es totalmente K-normalizado, entonces también es totalmente $K \cdot \mathrm{Inn}(Q)$-normalizado.

Si Q es totalmente K-normalizado, significa que para todo $\varphi \in \mathrm{Iso}_{\mathcal{F}}(Q,Q')$, tendremos que

$$|N_S^K(Q)| = |\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}^K(Q)| \cdot |C_S(Q)| \geq |\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}^{\varphi K \varphi^{-1}}(Q')| \cdot |C_S(Q')| = |N_S^{\varphi K \varphi^{-1}}(Q')|.$$

Para que Q también sea totalmente $K \cdot \mathrm{Inn}(Q)$-normalizado, se debería cumplir

$$|N_S^{K \cdot \mathrm{Inn}(Q)}(Q)| \geq |N_S^{\varphi K \varphi^{-1} \cdot \mathrm{Inn}(Q')}(Q')|,$$

equivalentemente

$$|\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}^{K \cdot \mathrm{Inn}(Q)}| \cdot |C_S(Q)| \geq |\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}^{\varphi K \varphi^{-1} \cdot \mathrm{Inn}(Q')}(Q')| \cdot |C_S(Q')|.$$

Por otra parte se tiene que

$$\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}^{K \cdot \mathrm{Inn}(Q)} = K \cdot \mathrm{Inn}(Q) \cap \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q),$$

lo que nos permite calcular la cardinalidad considerando que $\mathrm{Inn}(Q) \cap \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q) = \mathrm{Inn}(Q)$. Tendremos que

$$|\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}^{K \cdot \mathrm{Inn}(Q)}| = \frac{|K \cap \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q)| \cdot |\mathrm{Inn}(Q) \cap \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q)|}{|K \cap \mathrm{Inn}(Q) \cap \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q)|} = \frac{|K \cap \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q)| \cdot |\mathrm{Inn}(Q)|}{|K \cap \mathrm{Inn}(Q)|}.$$

Como $Q \leq S$ es totalmente $K \cdot \mathrm{Inn}(Q)$-normalizado si y sólo si

$$|N_S^{K \cdot \mathrm{Inn}(Q)}(Q)| \geq |N_S^{\varphi K \varphi^{-1} \cdot \mathrm{Inn}(Q')}(Q')|,$$

esta desigualdad equivalente a afirmar que

$$|C_S(Q)| \cdot \frac{|K \cap \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q)| \cdot |\mathrm{Inn}(Q)|}{|K \cap \mathrm{Inn}(Q)|} \geq |C_S(Q')| \cdot \frac{|\varphi K \varphi^{-1} \cap \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q')| \cdot |\mathrm{Inn}(Q')|}{|\varphi K \varphi^{-1} \cap \mathrm{Inn}(Q')|}.$$

Sustituyendo las identidades $|N_S^K(Q)| = |\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}^K(Q)| \cdot |C_S(Q)|$ y la identidad obtenida de la definición dada para $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}^K(Q)$, como $|\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}^K(Q)| = |K \cap \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q)|$, se puede ver que la desigualdad

$$|N_S^K(Q)| \cdot \frac{|\mathrm{Inn}(Q)|}{|K \cap \mathrm{Inn}(Q)|} \geq |N_S^{\varphi K \varphi^{-1}}(Q)| \cdot \frac{|\mathrm{Inn}(Q')|}{|\varphi K \varphi^{-1} \cap \mathrm{Inn}(Q')|}.$$

Dado que hay una correspondencia biyectiva entre

$$\mathrm{Inn}(Q) \text{ y } \mathrm{Inn}(Q')$$
$$\text{y } K \cap \mathrm{Inn}(Q) \text{ y } \varphi K \varphi^{-1} \cap \mathrm{Inn}(Q')$$

a través de la conjugación con φ, tendremos las respectivas identidades

$$|\mathrm{Inn}(Q)| = |\mathrm{Inn}(Q')|$$
$$|K \cap \mathrm{Inn}(Q)| = |\varphi K \varphi^{-1} \cap \mathrm{Inn}(Q')|,$$

por lo que lo único que se precisaría para obtener la desigualdad es que $|C_S(Q)| \geq |C_S(Q')|$, lo cual por el segundo inciso es cierto, ya que por hipótesis, Q es totalmente K-normalizado y por tanto totalmente centralizado. Luego si Q es totalmente K-normalizado, entonces también será totalmente $K \cdot \mathrm{Inn}(Q)$-normalizado.

Visto esto, supongamos que $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P, S)$ y definimos $P' = \varphi(P)$ y $K' = \varphi K \varphi^{-1}$. Supongamos que φ es tal que P' es totalmente $K'-$normalizado en $\mathcal{F}$. Si consideramos que P' es totalmente K'-normalizado, entonces P' también es totalmente $K' \cdot \mathrm{Inn}(P')$-normalizado. Dado que la implicación siempre es cierta para todo K, supongamos que K sea $K \cdot \mathrm{Inn}(P)$ para poder suponer que $P \leq N_S^K(P)$, puesto que al ser $c_p \in K \cdot \mathrm{Inn}(P)$ para todo $p \in P$, se tendrá que $P \leq N_S^K(P)$. Por el segundo inciso se tiene que $\mathrm{Aut}_S^{K'}(P') \in \mathrm{Syl}_p(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}^{K'}(P))$. Por otra parte, se tiene que $\mathrm{Aut}_S^K(P)$ es un p-grupo, por lo que existe un $\chi \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}^K(P)$ tal que $\chi \mathrm{Aut}_S^K(P) \chi^{-1} \leq \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}^K(P)$ sea conjugado a un p-grupo de $\varphi^{-1}\mathrm{Aut}_S^{K'}(P)\varphi$, y por lo tanto se tenga que

$$\varphi(\chi \mathrm{Aut}_S^K(P)\chi^{-1})\varphi^{-1} \leq \mathrm{Aut}_S^{K'}(P)$$

Como P' es totalmente centralizado, se puede utilizar la segunda condición de los sistemas de fusión saturados para extender el morfismo $\varphi \circ \chi$ a un homomorfismo $\overline{\varphi} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(N, S)$, donde $N = N_{\varphi \circ \chi}$, que por definición es

$$N_{\varphi \circ \chi} = \{g \in N_S(P) | \varphi \chi c_g \chi^{-1} \varphi^{-1} \in \mathrm{Aut}_S(P')\}.$$

De aquí, si $g \in N_S^K(P)$, entonces se tendrá que $\varphi \chi c_g \chi^{-1} \varphi^{-1} \in \mathrm{Aut}_S^{K'}(P') \leq \mathrm{Aut}_S(P')$, por lo que $N_S^K(P) \leq N$, y por tanto se cumple el tercer inciso. □

Lema 2.33. Dado un sistema de fusión $\mathcal{F}$ basado en un p-grupo S y $P \leq S$, el grupo $\mathrm{Inn}(P)$ es un p-subgrupo normal de $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(P)$.

Prueba. Es claro que

$$|\mathrm{Inn}(P)| = |P|/|Z(P)|.$$

Como tanto P como $Z(P)$ son p-grupos, $\mathrm{Inn}(P)$ es un p-subgrupo. Para ver que es un p-subgrupo de $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(P)$

$$\mathrm{Inn}(P) = \mathrm{Aut}_P(P) \leq \mathrm{Aut}_S(P) \leq \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(P).$$

Sea $c_p \in \mathrm{Inn}(P)$ con $p \in P$ y $\kappa \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(P)$. Dado $x \in P$, se tendrá

$$\kappa \circ c_p \circ \kappa^{-1}(x) = \kappa \circ c_p(\kappa^{-1}(x)) = \kappa(p \cdot \kappa^{-1}(x) \cdot p^{-1}) = \kappa(p) \cdot x \cdot \kappa(p^{-1}) = \kappa(p) \cdot x \cdot \kappa(p)^{-1}$$

pues κ es un homomorfismo, y por tanto $\kappa \circ c_p \circ \kappa^{-1}(x) = c_{\kappa(p)}(x)$. Dado que κ es un automorfismo de P, se tiene que $\kappa(p) \in P$, por lo que $kc_pk^{-1} = c_{k(p)}$. Esto prueba que $\mathrm{Inn}(P) \trianglelefteq \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(P)$. $\square$

Teorema 2.34. ***(Alperin)*** *Dado un sistema de fusión saturado $\mathcal{F}$ basado en un grupo S, entonces para cada morfismo $\varphi \in Iso_{\mathcal{F}}(P, P')$ en $\mathcal{F}$, existe una secuencia de subgrupos de S.*

$$P = P_0, P_1, \ldots, P_k = P' \qquad\qquad Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$$

y elementos $\varphi_i \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q_i)$, tales que:

- *Q_i es totalmente normalizado en $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}$-radical y $\mathcal{F}$-céntrico para cada i;*
- *$P_{i-1}, P_i \leq Q_i$ y $\varphi_i(P_{i-1}) = P_i$ para cada i, y*
- *$\varphi = \varphi_k \circ \varphi_{k-1} \circ \cdots \circ \varphi_1$*

Por la extensión del teorema de Alperin, es apropiado hacer un resumen lo suficientemente corto para evitar tecnicismos al lector sobre la prueba del mismo.

Dado que es una inducción inversa sobre el orden del p-grupo considerado, en casi la totalidad de la prueba se extiende el morfismo a uno entre dos subgrupos de orden mayor al considerado. En sí, la prueba se preocupa en analizar cómo crear extensiones si una de las condiciones pedidas no se cumple.

Consta de cuatro partes fuertes esencialmente y una conclusión. En la primera parte se demuestra que de tener un morfismo cualquiera entre dos subgrupos, sólo es necesario probar el teorema para un morfismo entre un subgrupo y un subgrupo totalmente normalizado.

La segunda parte simplifica el teorema pasando de validarlo para un morfismo entre un subgrupo y un subgrupo totalmente normalizado al caso de un automorfismo de un subgrupo totalmente normalizado.

La tercera parte demuestra que si el subgrupo totalmente normalizado escogido que se considera no es céntrico, el morfismo se puede extender a un grupo de orden mayor para utilizar la hipótesis de inducción.

La cuarta parte afirma que si el subgrupo no es radical, será posible extender el morfismo de interés a uno en un grupo de orden mayor.

La quinta parte culmina con que el teorema es válido si el subgrupo totalmente normalizado es céntrico y radical.

Prueba. Una pieza importante para la demostración es el hecho de que todo morfismo en un sistema de fusión es un homomorfismo inyectivo, por lo que si $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(A, B)$ y $|A| = |B|$, entonces $\alpha \in \mathrm{Iso}_{\mathcal{F}}(A, B)$.
Aplicaremos inducción hacia abajo con respecto al orden del p-grupo P considerado. Si $P = S$, entonces $P' = S$, y trivialmente se cumple que S es totalmente normalizado, $\mathcal{F}$-céntrico, $\mathcal{F}$-radical y $\varphi(S) = S$, por lo que se cumplen las condiciones del teorema: existe una familia $\{Q_1\}$ (la familia $\{S\}$) de subgrupos de S donde existen homomorfismos $\varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q_1)$ ($\varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(S)$) tales que $P, P' \leq Q_1$ y $\varphi(P) = P' \leq Q_1$ ($S \leq S$ e $\varphi(S) = S \leq S$).

1) Supongamos que $P \lneqq S$ (por tanto $|P| < |S|$). Sea P^* un subgrupo de S que sea $\mathcal{F}$-conjugado a P y que sea totalmente normalizado, y consideremos $\psi \in \mathrm{Iso}(P, P^*)$. El teorema se cumple para $\varphi \in \mathrm{Iso}_{\mathcal{F}}(P, P')$ si se cumple para ψ y $\psi \circ \varphi^{-1} \in \mathrm{Iso}_{\mathcal{F}}(P', P^*)$. Esto es debido a que podemos ver a φ como $(\psi \circ \varphi^{-1})^{-1} \circ \psi$ y si $Q_1, Q_2, \ldots Q_{k_1}$ y $\phi_i \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q_i)$ son las familias de subgrupos de S y morfismos que cumplen la condición para ψ respectivamente y $R_1, R_2, \ldots, R_{k_2}$ y $\tau_j \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(R_j)$ son las familias de subgrupos de S y morfismos que cumplen la condición para $\psi \circ \varphi^{-1}$, la familia que cumplirá para φ será la cadena de subgrupos formada por estas familias, es decir $\{Q_1, Q_2 \ldots, Q_{k_1}, R_{k_2}, R_{k_2-1}, \ldots, R_2, R_1\}$ y el morfismo φ se descompondría de la forma

$$\varphi = \tau_1^{-1} \circ \cdots \circ \tau_{k_2-1}^{-1} \circ \tau_{k_2}^{-1} \circ \phi_{k_1} \circ \phi_{k_1-1} \circ \cdots \circ \phi_1.$$

Esta implicación reduce el problema a probar el teorema cuando $P' = P^*$, es decir, cuando el isomorfismo es entre un p-grupo y un p-grupo totalmente normalizado.

2) Dado que P' es totalmente normalizado, por el lema 2.32, considerando $K = \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(P)$,

$N_S^K(P) = N_S(P)$, existen homomorfismos $\overline{\varphi} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(N_S(P), S)$ y $\chi \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(P)$ tales que $\overline{\varphi}(P) = P'$, y $\overline{\varphi}|_P = \varphi \circ \chi$.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[d, "\overline{\varphi}|_P"'] \arrow[dr, "\chi"] & \\ P' & P. \arrow[l, "\varphi"] \end{tikzcd}$$

La última afirmación implica la igualdad $\varphi = \overline{\varphi}|_P \circ \chi^{-1}$. Al ser $P \lneqq S$, por el teorema 1.14 es posible obtener un p-subgrupo de S con un orden mayor a P donde éste sea normal, por lo que $P \lneqq N_S(P)$. Como $\overline{\varphi}$ es un morfismo entre $N_S(P)$ y $\overline{\varphi}(N_S(P))$, el teorema se cumple para $\overline{\varphi}$ por ser morfismo entre grupos de orden mayor a P. Entonces, el teorema se cumple para $\overline{\varphi}|_P$, pues la misma familia para los que se cumple el teorema para $\overline{\varphi}$ servirán también para su restricción en P.

Como $\varphi = \overline{\varphi}|_P \circ \chi^{-1}$, y para $\overline{\varphi}|_P$ se cumple el teorema, si consideramos el automorfismo $\varphi\chi\varphi^{-1} \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(P')$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[dr, "\varphi\chi\varphi^{-1}"'] & P \arrow[l, "\varphi"'] \arrow[d, "\overline{\varphi}|_P"] \\ & P' \end{tikzcd}$$

y con esto podemos reconsiderar la demostración a que el teorema se cumpla para φ si y sólo si se cumple para $\varphi\chi\varphi^{-1}$. Entonces podemos considerar que el teorema se cumple si se cumple para P totalmente normalizado y $\varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(P)$.

3) Como P es totalmente normalizado, por el axioma de Sylow para los sistemas de fusión saturados, también es totalmente centralizado. Por el mismo axioma de Sylow, φ se extiende a un morfismo $\varphi^* \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(N_\varphi, S)$. Como $\varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(P)$, retomando la definición de N_φ,

$$N_\varphi = \{g \in N_S(P) \mid \ \varphi c_g \varphi^{-1} \in \mathrm{Aut}_S(\varphi(P))\},$$

podemos reescribir el conjunto como

$$N_\varphi = \{g \in N_S(P) \mid \ \varphi c_g \varphi^{-1} \in \mathrm{Aut}_S(P)\},$$

y con esto es claro que todo elemento en $C_S(P) \cdot P$ va a cumplir la condición, por lo que podemos afirmar que $C_S(P) \cdot P \leq N_\varphi$.

Ahora, dado que $\varphi^*|_P = \varphi$, se tendrá que $\varphi^*(C_S(P)) \cdot \varphi^*(P) = \varphi^*(C_S(P)) \cdot P$. Ya que todo elemento de $\varphi^*(C_S(P))$ conmuta con P, tendremos que $\varphi^*(C_S(P)) \leq C_S(P)$. Por tanto $\varphi^*(C_S(P)) = C_S(P)$.

Supongamos que P no es céntrico. Como P es totalmente normalizado, por los axiomas de saturación, P es totalmente centralizado y por el lema 2.20, $C_S(P) \cdot P$ es céntrico. Como P no es céntrico, $C_S(P) \nleq P$ (de otra forma $C_S(P) \cdot P = P$ y por tanto P sería céntrico, contradiciendo nuestra suposición). Entonces el grupo $C_S(P) \cdot P \neq P$ y por tanto podemos afirmar que $|C_S(P) \cdot P| > |P|$. Entonces el morfismo $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P, S)$ siempre puede extenderse a un morfismo $\varphi^* \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(C_S(P) \cdot P, S)$. En específico, a $\varphi^* \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(C_S(P) \cdot P)$, y por hipótesis de inducción, las condiciones del enunciado se cumplen para φ^*.

4) Ahora, si P no es radical, implica que $|\mathrm{O_p(Out_{\mathcal{F}}(P))}| > 1$.

Dado que P no es radical, podemos considerar al subgrupo $K = O_p(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(P)) \gneqq \mathrm{Inn}(P)$ pues el lema 2.33 afirma que $\mathrm{Inn}(P)$ es normal en $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(P)$ (La contención $K \gneqq \mathrm{Inn}(P)$ se debe a que K es el subgrupo normal máximo). Ya que K un p-subgrupo de $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(P)$, podemos decir por los teoremas de Sylow que K está contenido en un p-Sylow $\mathbb{K}$ de $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(P)$.

Dado que P es totalmente normalizado, $\mathrm{Aut}_S(P) \in \mathrm{Syl}_p(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(P))$ por el axioma de Sylow. Por lo tanto $\mathrm{Aut}_S(P)$ es conjugado con $\mathbb{K}$, es decir existe un $\beta \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(P)$ tal que $\beta\mathbb{K}\beta^{-1} = \mathrm{Aut}_S(P)$. En particular $\beta K \beta^{-1} \leq \mathrm{Aut}_S(P)$, pero ya que K es normal en $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(P)$, se cumple $\beta K \beta^{-1} = K$ y tendremos que $K \leq \mathrm{Aut}_S(P)$.

Recordemos que $N_S^K(P) = \{g \in N_S(P) |\ c_g \in K\}$. Como $\mathrm{Inn}(P) \lneqq K \leq \mathrm{Aut}_S(P)$, se tendrá que $N_S^K(P) \gneqq P$. Para todo $g \in N_S^K(P)$, se tiene que $c_g \in K$, y $\varphi' c_g \varphi'^{-1} \in K$ para todo $\varphi' \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(P)$. En concreto, si consideramos a φ, es exactamente la condición del conjunto N_φ dado en el axioma de extensión de los sistemas de fusión saturados,

$$N_\varphi = \{g \in N_S(P) |\ \varphi c_g \varphi^{-1} \in \mathrm{Aut}_S(P)\}.$$

Puesto que $K \trianglelefteq \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(P)$, todos los elementos de K cumplen la condición de N_φ, tendremos la siguiente contención para cualquier $\varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(P)$:

$$N_{\varphi} \geq N_S^K(P) \gneqq P.$$

Usando nuevamente la condición de extensión de los sistemas de fusión saturados, podemos afirmar que φ se extiende a un morfismo en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(N_{\varphi}, S)$, y dado que $|N_{\varphi}| > |P|$, por hipótesis de inducción φ cumple el teorema.

Finalmente, si $\varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(P)$ y P es totalmente normalizado, céntrico y radical, entonces el teorema se cumple de manera trivial considerando $Q_1 = P$ y $\varphi_1 = \varphi$. □

El teorema de Alperin es menos fuerte que el teorema de Alperin-Goldschmidt-Puig, más conocido como el teorema de Alperin-Goldschmidt ([15]), que considera los subgrupos esenciales, sin embargo, la prueba dada aquí servirá posteriormente para probar el teorema de Alperin en los sistemas de acción de fusión.

2.4 Preservando fusión

Una de las propiedades para dar paso a los capítulos posteriores es el de *preservar fusión*. Su utilidad radica en que los sistemas de acción de fusión podrán actuar sobre conjuntos estables (lo cual se definirá posteriormente).

Definición 2.35. Dados sistemas de fusión $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ basados en los p-grupos S y S' respectivamente, un homomorfismo de grupos $\alpha\colon S \to S'$ *preserva fusión* si existe un funtor $F_{\alpha}\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ tal que $F_{\alpha}(P) = \alpha(P)$ para todo $P \leq S$ y se cumple que para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P, P')$,

$$F_{\alpha}(\varphi) \circ \alpha = \alpha \circ \varphi$$

esto es, que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"'] & \alpha(P) \arrow[d, "F_\alpha(\varphi)"] \\ P' \arrow[r, "\alpha"] & \alpha(P') \end{tikzcd}$$

conmute.

Definición 2.36. Dado un sistema de fusión $\mathcal{F}$ basado en un p-grupo S y un grupo finito G, un morfismo $\alpha\colon S \longrightarrow G$ *preserva fusión* si para algún $T \in \mathrm{Syl}_p(G)$ conteniendo $\alpha(S)$, se tiene que que $\alpha\colon S \longrightarrow T$ preserva fusión en el sentido de la definición 2.35.

Para los fines del último capítulo, requerimos de la equivalencia de las definiciones dadas por Gelvin entre la definición anterior y el teorema siguiente.

Teorema 2.37. *Dado un sistema de fusión $\mathcal{F}$ basado en S, un grupo finito G y un homomorfismo de grupos $\alpha\colon S \longrightarrow G$, α* preserva fusión *si y sólo si para cada $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_S}(P, P')$ existe algún $\psi \in \mathrm{Hom}_G(\alpha(P), \alpha(P'))$ tal que $\alpha\varphi = \psi\alpha$.*

Prueba. Si α preserva fusión, por definición significa que existirá un $T \in \mathrm{Syl}_p(G)$ tal que exista un funtor $F_\alpha\colon \mathcal{F}_S \longrightarrow \mathcal{F}_T(G)$ que sea evaluar por α los objetos de $\mathcal{F}_S$ y tal que para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_S}(P, P')$,

$$\alpha \circ \varphi = F_\alpha(\varphi) \circ \alpha.$$

Como los morfismos del sistema de fusión $\mathcal{F}_T(G)$ son conjugaciones por los elementos de G, se cumple que $F_\alpha(\varphi) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_T(G)}(\alpha(P), \alpha(P')$ para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_S}(P, P')$ lo cual hace evidente la ida.

Por otra parte, si consideramos que para cada $\varphi \in \mathrm{hom}_{\mathcal{F}_S}(P, P')$ exista algún homomorfismo $c_g \in \mathrm{Hom}_G(\alpha(P), \alpha(P'))$ tal que $\alpha\varphi = c_g\alpha$, si existiera otro morfismo $c_{g'}$ tal que cumpliera la condición, se tendría que para cada $p \in P$, $c_g\alpha(p) = g\alpha(p)g^{-1} = g'\alpha(p)g'^{-1}$, implicando que $\alpha(p)(gg')^{-1} = gg'\alpha(p)$, lo que es equivalente a que $gg' \in C_G(\alpha(P))$, por lo que implicaría que la única forma de que existiera un $c_{g'}$ distinto es que $g' = gc$ donde $c \in C_G(P)$. $\square$

El concepto dado en 2.37 inicialmente fue dado como un teorema en la tesis de Gelvin ([10]). Sin embargo resulta de vital importancia verlo como una definición ahora, pues posteriormente dará paso al concepto que se desarrollará en el capítulo final.

Capítulo 3

Sistemas de acción de fusión

3.1 Preservar fusión en S_n

Previo al concepto de sistema de acción de fusión independiente de un grupo G finito dado, son necesarios ciertos requisitos. Denotaremos por Σ_X al conjunto de permutaciones de elementos en el conjunto X. Durante este capítulo se dará por entendido que X es un conjunto de cardinalidad finita. Se denotará por ${}_PX$ al conjunto X cuando se considere bajo la acción de P y si $\varphi\colon P \longrightarrow Q$, se denotará por ${}^{\varphi}_{P}X$ al conjunto X bajo la acción de P dada de la forma $p \cdot x := \varphi(p) \cdot x$

Definición 3.1. Sea X un S-conjunto y $P, Q \leq S$. Dados $\varphi \in \mathrm{Hom}(P, Q)$ y $\sigma \in \Sigma_X$, diremos que σ es φ-equivariante si para todo $p \in P$, y todo $x \in X$, se cumple que $\sigma(p \cdot x) = \varphi(p) \cdot \sigma(x)$.

Por otra parte, haremos uso del concepto de preservar fusión definido al final del capítulo anterior para comprender la utilidad del concepto de $\mathcal{F}$-estabilidad y qué papel juega en su aplicación final sobre los sistemas de acción de fusión.

Lema 3.2. Sea X un G-conjunto y Σ_X el grupo de permutaciones de X. Se define el homomorfismo $\rho\colon G \longrightarrow \Sigma_X$ asignando a cada $g \in G$ su acción en X; también se define $\rho_S = \rho|_S$. Las siguientes afirmaciones son ciertas:

- $\rho_S\colon S \longrightarrow \Sigma_X$ cumple que preserva fusión con respecto a $\mathcal{F}_G$.
- Para todo $g \in G$, $s \in S$ y $x \in X$, se tiene que $g \cdot (s \cdot x) = c_g(s) \cdot (g \cdot x)$.
- Para todo $H \leq G$ y $g \in G$, se tiene que ${}_H X \cong {}^{c_g}_{H}X$ como H-conjuntos.
- Para todo $P \leq S$ y $g \in G$, se tiene que $|X^P| = |X^{gPg^{-1}}|$.

Prueba. Para el primer inciso si consideramos $c_g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_G}(P, Q)$, podemos ver que si consideramos $F_{\rho_S}(c_g) = c_{\rho(g)}$ el diagrama

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\rho_S"] \arrow[d, "c_g"'] & \rho_S(P) \arrow[d, "F_{\rho_S}(c_g)"] \\ Q \arrow[r, "\rho_S"] & \rho_S(Q) \end{tikzcd}$$

cumple que $c_{\rho_S(g)} \circ \rho_S = \rho_S \circ c_g$, por lo que cumplirá que preserva fusión. Para el segundo inciso, tenemos que claramente $g\cdot(s\cdot x) = (g\cdot s\cdot g^{-1})\cdot(g\cdot x) = c_g(s)\cdot(g\cdot x)$. Para que ${}_H X$ fuera isomorfo como H-conjunto a ${}^{c_g}_{H}X$, se desearía que existiera una función entre H-conjuntos $f\colon {}_H X \longrightarrow {}^{c_g}_{H}X$ tal que tuviera una función inversa y que cumpliera que para todo $h \in H$ fuera cierto que $f(h \cdot x) = h \cdot f(x)$, y de forma análoga $f^{-1}(h \cdot x) = h \cdot f^{-1}(x)$. Podemos elegir el isomorfismo $\rho(g)\colon X \longrightarrow X$, tendremos que si $h \in H$, al aplicar el isomorfismo, se obtendrá que

$$\rho(g)(h \cdot x) = g \cdot h \cdot x = g \cdot h \cdot g^{-1} \cdot g \cdot x = c_g(h)\rho(g)(x)$$

que es justo lo que necesitamos. Para el cuarto inciso, es claro que para todo elemento $x \in X^P$, podemos considerar el elemento $g\cdot x$, el cual estará en $X^{gPg^{-1}}$, ya que $g\cdot p\cdot g^{-1}(g\cdot x) = g\cdot x$ para todo $p \in P$.

□

Definición 3.3. Dado un sistema de fusión saturado $\mathcal{F}$ sobre un p-grupo S y un S-conjunto X, se dirá que X es $\mathcal{F}$-*estable* si el homomorfismo $\rho\colon S \longrightarrow \Sigma_X$ que determina la acción de

S preserva fusión.

Teorema 3.4. *Sea S un p-grupo y $\mathcal{F}$ un sistema de fusión saturado basado en S. Sea $\rho_S\colon S \longrightarrow \Sigma_X$ el homomorfismo que define la acción de S. Para cualquier S-conjunto X los siguientes enunciados son equivalentes:*

- *X es $\mathcal{F}$-estable.*
- *Para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P, Q)$, existe un $\sigma \in \Sigma_X$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\rho_S"] \arrow[d, "\varphi"'] & \rho_S(P) \arrow[d, "c_\sigma"] \\ P' \arrow[r, "\rho_S"] & \rho_S(P') \end{tikzcd}$$

- *Para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P, Q)$, existe un isomorfismo abstracto de P-conjuntos ${}_PX \cong {}^{\varphi}_{P}X$.*
- *Para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P, Q)$, el orden de los conjuntos de puntos fijos de X^P y $X^{\varphi(P)}$ es la misma.*

Prueba. Es claro que la equivalencia entre el primer punto con el segundo es debido a la definición de preservar fusión y la equivalencia dada por el teorema 2.37.

Para ver la equivalencia entre el segundo y el tercer punto, veamos que el tercer punto puede reescribirse como decir que existe una función $f\colon {}_PX \xrightarrow{\cong} {}^{\varphi}_{P}X$ tal que $f(g \cdot x) = \varphi(g)f(x)$. Para la ida del segundo punto al tercero, si consideramos $f = \sigma$ donde σ es la permutación que hace conmutar el diagrama del segundo punto, tendremos que para $g \in P$ y $x \in X$, ocurrirá que

$$\sigma(\rho_S(g) \cdot x) = \rho_S(\varphi(g)) \cdot \sigma(x),$$

por lo que se cumplirá que σ sea la función requerida. Para la vuelta del tercer punto al segundo, podemos ver que la misma función f que cumple la condición para el tercer punto cumplirá que el diagrama conmute, puesto que $f\colon {}_PX \xrightarrow{\cong} {}^{\varphi}_{P}X$, para todo $p \in P$ y $x \in X$, se tendrá que $f(\rho_S(p) \cdot x) = \rho_S(\varphi(p)) \cdot f(x)$, y dado que f es una función biyectiva entre X y él mismo, $f \in \Sigma_X$, por lo que $\sigma = f$ cumple las dos condiciones del segundo inciso.

Para ver la ida del tercer al cuarto, dado un $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P,Q)$ tal que σ sea φ-equivariante, por definición σ da un isomorfismo de P-conjuntos ${}_PX \cong {}^{\varphi}_{P}X$. Si consideramos un $x \in {}_PX^P$, es claro que $\sigma(\rho_S(p)\cdot x) = \sigma(x)$ para todo $p \in P$. Por otra parte, como σ es φ-equivariante, $\sigma(\rho_S(p)\cdot x) = \rho_S(\varphi(p))\cdot\sigma(x)$. Por tanto tenemos que $\rho_S(\varphi(p))\cdot\sigma(x) = \sigma(\rho_S(p)\cdot x) = \sigma(x)$. Consecuentemente, $\rho_S(\varphi(p))\cdot\sigma(x) = \sigma(x)$. Por tanto si $x \in X^P$, entonces $\sigma(x) \in X^{\varphi(P)} = {}^{\varphi}_{P}X^P$. De forma análoga obtenemos que si $\sigma(x) \in X^{\varphi(P)}$, entonces $x \in X^P$ considerando la función σ^{-1} (la cual existe ya que σ es un isomorfismo entre G-conjuntos). De lo anterior, $|X^P| = |{}^{\varphi}_{P}X^P| = |X^{\varphi(P)}|$ concluyendo así la ida del tercer punto al cuarto.

Para ver la vuelta del cuarto al tercer punto, recordemos que el teorema 1.15 justamente implica que ambos conjuntos sean isomorfos. $\square$

3.2 Sistemas de acción de fusión

Definición 3.5. Dado un p-grupo S y un $S-$conjunto X, se define como la *categoría de Gelvin* $\mathfrak{U}_{(S,X)}$ a la categoría cuyos objetos son todos los subgrupos $P \leq S$ y los morfismos son

$$\mathrm{Mor}_{\mathfrak{U}_{(S,X)}}(P,Q) = \{(\varphi,\sigma) \in \mathrm{Inj}(P,Q) \times \Sigma_X \mid \sigma \text{ es } \varphi\text{-equivariante}\}.$$

La composición se realiza coordenada a coordenada.

Definición 3.6. Sea S un p-grupo. Un *sistema de acción de fusión* basado en S actuando en un conjunto X es una subcategoría $\mathfrak{X}_S(X)$ de $\mathfrak{U}(S,X)$ cuyos objetos son los mismos que los de $\mathfrak{U}(S,X)$ y sus morfismos, denotados por $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{X}_S(X)}(P,Q)$ satisfacen las siguientes condiciones:

- Para cualesquiera $P, Q \leq S$ y para todo $s \in S$ tal que $sPs^{-1} \subseteq Q$ se tiene que $(c_s, \ell_s) \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{X}(X)}(P,Q)$, donde $\ell_s \colon X \longrightarrow X$ está dado por $\ell_s(x) = s \cdot x$.
- Todo morfismo de $\mathfrak{X}_S(X)$ se descompone como un isomorfismo seguido de otro morfismo cuya primera coordenada es una inclusión.

Todo sistema de acción de fusión estará contenido en una categoría mayor basándola en el conjunto y p-grupo correspondiente. La categoría de Gelvin es el sistema de acción de fusión más grande que puede darse para un p-grupo S y un S-conjunto X, puesto que contiene todos los objetos, y posibles morfismos que podría tener un sistema de acción de fusión con S y X.

Para posteriores referencias, denotaremos por $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P,Q)$ al conjunto de morfismos de la forma (c_s, ℓ_s) en $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{X}_S(X)}(P,Q)$ con $s \in S$.

Con esta definición se ve que el concepto de sistema de acción de fusión es muy parecido al de un sistema de fusión expuesto en la definición **??**.

Definición 3.7. El *sistema de fusión subyacente* de $\mathfrak{X}_S(X)$ es el sistema de fusión $\mathcal{F}^{\mathfrak{X}_S(X)}$ basado en S donde

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}^{\mathfrak{X}_S(X)}}(P,Q) = \{\varphi \in \mathrm{Inj}(P,Q) \mid \text{existe } \sigma \in \Sigma_X \text{ tal que } (\varphi,\sigma) \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{X}_S(X)}(P,Q)\}.$$

Dado que los sistemas de acción de fusión sobre un p-grupo S de G relativo a la G-acción en un conjunto X finito es más accesible en la ejemplificación, es apropiado dar el concepto del mismo para posteriormente ejemplificar un sistema de acción de fusión.

Definición 3.8. Dado un grupo finito G, un G-conjunto finito X y un p-subgrupo de Sylow S de G, se define el *sistema de acción de fusión basado en S relativo a la G-acción en X*[†] como la categoría $\mathfrak{X}_S(G,X)$, cuyos objetos son los subgrupos $P \leq S$ y sus morfismos son dados por

$$\mathrm{Mor}_{\mathfrak{X}_S(G,X)}(P,Q) = \{(\varphi,\sigma) \mid \varphi = c_g \colon P \longrightarrow Q \ \text{ y } \ \sigma = \ell_g : {}_PX \xrightarrow{\cong} {}_P^{\varphi}X \text{ para cierto } \ g \in G\}.$$

[†]En la notación que usa Gelvin en [10], éste denota un sistema de acción de fusión por $\mathfrak{X}_S(G)$ como se haría en un sistema de fusión. Sin embargo, en esta notación se pierde el conjunto del que se hace referencia, es por ésto que la notación que se usará es $\mathfrak{X}_S(G,X)$

La composición está dada coordenada a coordenada.

Es claro que el sistema de acción de fusión basado en S relativo en G actuando sobre X es un caso particular de la definición 3.6, pero en general, un sistema de acción de fusión podría tener morfismos que no fueran de la forma (c_g, ℓ_g).

Cuando un sistema de fusión esté basado en un p-grupo S y sea relativo a la acción del mismo en un conjunto X, se denotará por $\mathfrak{X}_S(X)$. Si el sistema de acción de fusión sea relativo a un p-grupo S y basado en él mismo, se denotará por $\mathfrak{X}(S, X)$. Si referimos a un sistema de acción de fusión general o no hay posibilidad de confundir el sistema de acción de fusión del que se habla con otro, denotaremos al sistema de acción de fusión por $\mathfrak{X}(X)$.

Ejemplo 3.9. Consideremos el grupo $G = \mathbb{Z}_2$ y su acción sobre el conjunto $X = \{1, 2\}$, la cual será determinada por $\rho\colon \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \Sigma_X$ asignando $\rho(1) = (1, 2)$.

Para determinar el sistema de acción de fusión basado en G relativo a la G-acción en X, veamos que el conjunto de objetos del sistema de acción de fusión $\mathfrak{X}_G(X)$ es $\{1, G\}$ donde 1 denota al grupo trivial. Claramente los homomorfismos de $\mathbb{Z}_2$ por conjugación son únicamente el trivial, dado que es un grupo abeliano. Por otra parte, las acciones de los homomorfismos son distintas dependiendo del elemento que actúe. Por lo tanto, los automorfismos del sistema de acción de fusión son

$$\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}_G(X)}(1) = \{(\mathrm{Id}_1, \rho(0)), (\mathrm{Id}_1, \rho(1))\} \cong \mathbb{Z}_2,$$

$$\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}_G(X)}(G) = \{(\mathrm{Id}_G, \rho(0)), (\mathrm{Id}_G, \rho(1))\} \cong \mathbb{Z}_2,$$

$$\mathrm{Mor}_{\mathfrak{X}_G(X)}(1, G) = \{(\iota, \rho(0)), (\iota, \rho(1))\},$$

donde ι es la inclusión de 1 a G. Por tanto, el diagrama del sistema de acción de fusión está dado por (salvo composiciones)

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "\mathbb{Z}_2"] \arrow[r] & G \arrow[loop right, "\mathbb{Z}_2"] \end{tikzcd}$$

Notemos que esta categoría es distinta del sistema de fusión de G basado en sí mismo, pues el subgrupo trivial tiene más de un automorfismo.

Ejemplo 3.10. Sea $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ el 4-grupo de Klein, y $X = \{1, 2, 3, 4\}$ el conjunto de cuatro elementos. Sea $\rho\colon G \longrightarrow \Sigma_X$ el homomorfismo que define la acción de G en X, donde la acción está determinada por $\rho((1,0)) = (1,2)(3,4)$ y $\rho((0,1)) = (1,3)(2,4)$.

En el capítulo anterior (ejemplo 2.4) obtuvimos los subgrupos de G y los morfismos de la primera coordenada, obteniendo el sistema de fusión $\mathcal{F}_G$ determinado por el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & G & \\
P_{(1,0)} \arrow[ur, hook] & P_{(1,1)} \arrow[u, hook] & P_{(0,1)} \arrow[ul, hook]
\end{tikzcd}$$

Y sus automorfismos eran los triviales para cualquier $P \leq G$. Por tanto, para obtener el sistema de acción de fusión, sólo requerimos de calcular las acciones del grupo y ver cómo formar los morfismos en base a estos y los automorfismos del sistema de fusión. Notemos que para cada elemento de G existe una acción correspondiente:

$$\begin{aligned}
\rho((0,0)) &= \quad () \\
\rho((1,0)) &= (1,2)(3,4) \\
\rho((0,1)) &= (1,3)(2,4) \\
\rho((1,1)) &= (1,4)(2,3).
\end{aligned}$$

Por esto, como cada elemento de G actúa de forma distinta, los automorfismos de cada subgrupo $P \leq G$ serán de la forma $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}_G(X)}(P) = \{\mathrm{Id}_P\} \times \{\rho(g) \mid g \in G\}$, los cuales claramente serán isomorfos a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, y los morfismos entre $P, Q \leq G$ serán $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{X}_G(X)}(P, Q) = \{\iota\} \times \{\rho(g) \mid g \in G\}$. donde $\iota\colon P \longrightarrow Q$ es la inclusión de P a Q.

Por tanto, el diagrama del sistema de acción de fusión está determinado por (salvo composiciones y el grupo trivial)

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[loop above, "\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2"] & \\
P_{(1,0)} \arrow[ur] \arrow[loop below, "\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2"] & P_{(1,1)} \arrow[u] \arrow[loop below, "\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2"] & P_{(0,1)} \arrow[ul] \arrow[loop below, "\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2"]
\end{tikzcd}$$

dejando nuevamente una distinción entre un sistema de fusión y un sistema de acción de fusión por el hecho de contener automorfismos que el primero no tenía.

Ejemplo 3.11. Consideremos el grupo simétrico $G = S_5$, junto con el conjunto $X = \mathrm{Syl}_5(S_5)$ y el 5-subgrupo de Sylow $S = \langle\ (1,2,3,4,5)\ \rangle$ del G en cuestión. G actúa sobre X por conjugación. Tendremos que $\mathrm{Ob}(\mathfrak{X}_S(G,X)) = \{1, S\}$, donde 1 es el grupo trivial.

Si consideramos el grupo trivial, el único automorfismo del que dispone es la identidad, por lo que la primera coordenada de sus morfismos será 1, sin embargo en la segunda coordenada serán todas las conjugaciones ℓ_g. Esta última afirmación es debido a que si hubiese alguna conjugación que deje fijo a X, implicaría que el elemento en cuestión esté en el normalizador de cada uno de los seis subgrupos.

Para demostrar que la intersección de los normalizadores es trivial, calcularemos sus normalizadores. Dado que para cualesquiera dos S_i, S_j se cumple que $|N_{S_5}(S_i)| = |N_{S_5}(S_j)|$, calculemos el normalizador de uno de los S_i y luego mediante conjugación obtendremos los de los demás.

Fijémonos en S. Claramente el normalizador de S lo contiene, por tanto es de orden mayor o igual a cinco. Por tanto, el normalizador de S puede ser de orden 5, 10, 15, 20, 30, 40, 60 ó 120. Veamos que el normalizador de S en S_5 tiene que ser $N_{S_5}(S) = \langle\ (1,2,3,4,5)\ ,\ (2,4,5,3)\ \rangle$.

Como $(1,2,3)(1,2,3,4,5)(1,3,2) = (1,2,4,5,3) \notin S$, implica que $N_{S_5}(S)$ no puede ser S_5 y tampoco A_5 (pues $(1,2,3) \in A_5$). Por otra parte, notemos que no pueden ser de orden 30 ni 40, ya que de serlo, el normalizador en cuestión tendría un elemento de orden 2, y cualquier grupo que contenga a $(1,2,3,4,5)$ y un elemento de orden 2 generará a S_5, por lo que el normalizador sólo puede ser de orden menor o igual a 20. Como el grupo $\langle\ (1,2,3,4,5)\ ,\ (2,4,5,3)\ \rangle$ es de orden 20 y S es normal en él, entonces debe ser el normalizador de S.

Para ver ahora que la intersección entre los normalizadores de cada 5-Sylow en $\mathrm{Syl}_5(S_5)$ es trivial, si consideramos S y $S' = \langle\ (1,2,4,5,3)\ \rangle$ cumplen que $N_{S_5}(S) \cap N_{S_5}(S') = \langle\ (1,2,5,4)\ \rangle$. Denotemos a esta intersección N.

Por otra parte, si consideramos el normalizador de $S'' = \langle\ (1,3,4,5,2)\ \rangle$, es claro que $N_{S_5}(S'') = \langle\ (1,3,4,5,2),(2,4,3,5)\ \rangle$ no contiene a ninguno de los cuatro elementos de N, por lo que la intersección de tres normalizadores es trivial, y por consecuente, la de los seis 5-Sylows de S_5 lo será también. Por tanto, es posible afirmar que ninguna conjugación de los elementos de S_5 deja fijo a $\mathrm{Syl}_5(S_5)$.

Por lo anterior, los automorfismos del subgrupo trivial son de la forma

$$\mathrm{Mor}_{\mathfrak{X}_S(G,X)}(1) = \{(1,\ell_g) \mid g \in G\}$$

Dado que el grupo de donde se obtiene S es S_5, los automorfismos del sistema de acción de fusión sobre este objeto serán de la forma (c_g, ℓ_g) con $g \in S_5$.

Más aún, las conjugaciones c_g sólo pueden ser cuatro posibles automorfismos que serán de la forma $\varphi(s) = s^k$ para $1 \leq k \leq 4$, pues el generador $(1,2,3,4,5)$ puede mandarse a cuatro generadores distintos y cada uno generará un automorfismo diferente.

- Para generar los morfismos tales que su primera entrada sea la identidad Id_S $(k=1)$, los elementos $g \in N_{S_5}(S)$ serán de forma tal que sus elementos son los únicos que fijan a S, por lo que los morfismos de ésta forma serán $\{(1,\ell_g) \mid g \in S\}$.

- Para generar los morfismos que manden (1,2,3,4,5) a (1,3,5,2,4) (esto es, $k=2$), los elementos serán $\{(c_g,\ell_g) \mid g = (2,4,5,3)\cdot s$ para algún $s \in S\}$.

- Para generar los morfismos que manden (1,2,3,4,5) a (1,4,2,5,3) (esto es, $k=3$), los elementos serán $\{(c_g,\ell_g) \mid g = (2,4,5,3)\cdot s$ para algún $s \in S\}$.

- Para generar los morfismos que manden (1,2,3,4,5) a (1,5,4,3,2) (esto es, $k=4$), los elementos serán $\{(c_g, \ell_g) \mid g = (2,3,5,4) \cdot s \text{ para algún } s \in S\}$.

Con ésto se tiene la lista de automorfismos de S para determinar el sistema de acción de fusión basado en S relativo a la acción de S_5 en $\mathrm{Syl}_5(S_5)$, que es el grupo generado por los elementos de la forma $\alpha = (1, (1,2,3,4,5))$ y $\beta = (\varphi^2, (2,4,5,3))$. Realizando las operaciones, uno puede notar que el grupo de morfismos de S en $\mathfrak{X}_S(G,X)$ es isomorfo a $N_{S_5}(S)$.

Con los datos ya establecidos, ya podemos decir finalmente que la categoría $\mathfrak{X}_S(G,X)$ con base en S es dada por los objetos $\mathrm{Ob}(\mathfrak{X}_S(G,X)) = \{1, S\}$, y los morfismos están dados por $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{X}_S(G,X)}(1,1) \cong S_5$ y $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{X}_S(G,X)}(S,S) \cong N_{S_5}(S)$.

El ejemplo 3.11 es un buen caso donde se puede hacer la distinción entre la categoría determinada por el sistema de acción de fusión, representada bajo el diagrama (salvo composiciones):

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "S_5"] \arrow[r] & S \arrow[loop right, "N_{S_5}(S)"] \end{tikzcd}$$

Y la categoría determinada usando el mismo 5-grupo para generar el sistema de fusión basado en éste, que queda dado (salvo composiciones) por:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "1"] \arrow[r] & S \arrow[loop right, "\mathbb{Z}_4"] \end{tikzcd}$$

Una de las cuestiones que más distingue a los sistemas de acción de fusión de los sistemas de fusión es el hecho de que el grupo trivial deja de tener únicamente un grupo de automorfismos trivial y adquiere por grupo de automorfismos en el sistema de acción de fusión un grupo isomorfo a la imagen de la acción del grupo que se use. Por otra parte, para los sistemas de acción de fusión $\mathfrak{X}_S(G,X)$ basados en un p-grupo S relativo a la acción de un grupo G sobre un conjunto X, si G cumple que el homomorfismo que determina la acción $\rho\colon G \longrightarrow \Sigma_X$ tiene una imagen inyectiva, el grupo de automorfismos en el sistema de acción de fusión de todos los grupos $P \leq S$ termina siendo isomorfo a $N_G(P)$.

Utilizar conjuntos X con diferentes acciones para un mismo p-grupo genera diferentes categorías únicamente por la estructura de los grupos de automorfismos.

Definición 3.12. Se define el funtor $\pi_{\mathcal{F}}\colon \mathfrak{X}(X) \longrightarrow \mathcal{F}^{\mathfrak{X}(X)}$ mediante

$$\begin{aligned} \pi_{\mathcal{F}}\colon Ob(\mathfrak{X}(X)) &\longrightarrow Ob(\mathcal{F}^{\mathfrak{X}(X)}) & \qquad \pi_{\mathcal{F}}\colon \mathrm{Hom}_{\mathfrak{X}(X)}(P,Q) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}^{\mathfrak{X}(X)}}(P,Q) \\ P &\mapsto P & (\varphi,\sigma) &\mapsto \varphi \end{aligned}$$

Considerando el conjunto $X = \{*\}$ con la acción trivial de G y p-Sylow S, puesto que en este caso la segunda coordenada del sistema de acción de fusión siempre será la identidad, entonces $\pi_{\mathcal{F}}$ es un isomorfismo entre $\mathfrak{X}_S(G,X)$ y $\mathcal{F}_S(G)$.

Puesto que es posible dar una proyección sobre la primera coordenada, resulta deseable tener una proyección para la segunda coordenada:

Definición 3.13. Dado un sistema de acción de fusión $\mathfrak{X}(X)$ basado en un p-grupo S, para cualquier par de subgrupos $P, Q \leq S$ se define $\pi_\Sigma : \mathrm{Mor}_{\mathfrak{X}(X)}(P,Q) \longrightarrow \Sigma_X$, la proyección en la segunda coordenada de los morfismos de P a Q en $\mathfrak{X}(X)$ al grupo de permutaciones de X.
Cuando $P = Q$, se tiene que $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{X}(X)}(P,Q)$ es un grupo y $\pi_\Sigma\colon \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(X)}(P) \longrightarrow \Sigma_X$ es un homomorfismo de grupos, por lo que su imagen es un subgrupo de Σ_X, y se denota por $\Sigma^{\mathfrak{X}(X)}(P)$.

Definición 3.14. Sea K el kernel de la acción de G sobre X. Definimos el X-*normalizador* y X-*centralizador* en G de un subgrupo $H \leq G$ como

$$N_G(H;X) = N_G(H) \cap K \qquad\qquad C_G(H;X) = C_G(H) \cap K.$$

En la definición anterior, si consideramos $G = S$ un p-grupo, $P \leq S$, y K el kernel de la acción de S sobre X, tendremos los X-centralizadores y X-normalizadores de P en S.

En su trabajo de tesis, Gelvin define los *automizadores* para los sistemas de acción de fusión relativos a un grupo G que posteriormente servirían para dar el concepto de *sistema de* *acción de fusión saturado*, es por ello que es preciso hacer mención de ellos.

Definición 3.15. Dado un grupo G, un G-conjunto X y $P \leq S \leq G$, se definen los siguientes conjuntos como los G-*automizadores*† de P como

$$\begin{aligned}
\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}_S(G,X)}(P) &= \{(\varphi,\sigma) \mid \text{son morfismos de } \mathfrak{X}_S(G,X)\}\\
\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}^{\mathfrak{X}_S(G,X)}}(P) &= \{\varphi \in \mathrm{Aut}(P) \mid \text{existe } \sigma \in \Sigma_X \text{ tal que } (\varphi,\sigma) \in \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}_S(G,X)}(P)\}\\
\Sigma^{\mathfrak{X}_S(G,X)}(P) &= \{\sigma \in \Sigma_X \mid \text{existe } \varphi \in \mathrm{Aut}(P) \text{ tal que } (\varphi,\sigma) \in \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}_S(G,X)}(P)\}\\
\mathcal{F}_0^{\mathfrak{X}_S(G,X)}(P) &= \{\varphi \in \mathrm{Aut}(P) \mid (\varphi,\mathrm{id}_X) \in \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}_S(G,X)}(P)\}\\
\Sigma_0^{\mathfrak{X}_S(G,X)}(P) &= \{\sigma \in \Sigma_X \mid (\mathrm{id}_P,\sigma) \in \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}_S(G,X)}(P)\}.
\end{aligned}$$

Dichos de otra forma, los automizadores pueden entenderse por los cocientes:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}_S(G,X)}(P) &= N_G(P)/C_G(P;X)\\
\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}^{\mathfrak{X}_S(G,X)}}(P) &= N_G(P)/C_G(P)\\
\Sigma^{\mathfrak{X}_S(G,X)}(P) &= N_G(P)/N_G(P;X)\\
\mathcal{F}_0^{\mathfrak{X}_S(G,X)}(P) &= N_G(P;X)/C_G(P;X)\\
\Sigma_0^{\mathfrak{X}_S(G,X)}(P) &= C_G(P)/C_G(P;X).
\end{aligned}$$

Los grupos previos pueden verse con el siguiente diagrama donde cada elemento en una arista es el cociente de los vértices que une.

$$\begin{tikzcd}
 & & N_G(P) \arrow[dl, dash] \arrow[dd, dash] \arrow[dr, dash] & & \\
 & \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}^{\mathfrak{X}_S(G,X)}}(P) \arrow[dl, dash] & & \Sigma^{\mathfrak{X}_S(G,X)}(P) \arrow[dr, dash] & \\
C_G(P) \arrow[dr, dash] & & \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}_S(G,X)}(P) \arrow[dd, dash] & & N_G(P;X) \arrow[dl, dash] \\
 & \Sigma_0^{\mathfrak{X}_S(G,X)}(P) \arrow[dr, dash] & & \mathcal{F}_0^{\mathfrak{X}_S(G,X)}(P) \arrow[dl, dash] & \\
 & & C_G(P;X) & &
\end{tikzcd}$$

†La notación usada para los conjuntos anteriores no es la misma que la usada por Gelvin en [10] con motivo de tener una similitud de la notación usada en [4] para los sistemas de fusión.

En el diagrama es necesario dirigir especial atención a las dos sucesiones exactas obtenidas de las definiciones, que son

$$0 \longrightarrow \Sigma_0^{\mathfrak{X}_S(G,X)}(P) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}_S(G,X)}(P) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}^{\mathfrak{X}_S(G,X)}}(P) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_0^{\mathfrak{X}_S(G,X)}(P) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}_S(G,X)}(P) \longrightarrow \Sigma^{\mathfrak{X}_S(G,X)}(P) \longrightarrow 0,$$

Las cuales, reescribiéndolas como cocientes y haciendo uso del tercer teorema de isomorfismos, resultan en una explicación clara del porqué es cierta cada sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow C_G(P)/C_G(P;X) \longrightarrow N_G(P)/C_G(P;X) \longrightarrow N_G(P)/C_G(P) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow N_G(P;X)/C_G(P;X) \longrightarrow N_G(P)/C_G(P;X) \longrightarrow N_G(P)/N_G(P;X) \longrightarrow 0.$$

Estas sucesiones exactas son igualmente válidas para el concepto de sistema de acción de fusión sin considerar a un grupo G y su acción sobre el conjunto X sobre el que se desarrolle el sistema de acción de fusión.

A diferencia de los sistemas de fusión, los axiomas de saturación de un sistema de acción de fusión (que se definirán a continuación) requieren de más condiciones, por ello son necesarios definir ciertos conceptos previos al enunciado.

Definición 3.16. Dado un p-grupo S y $P \leq S$ y un S-conjunto X, se definen los siguientes conjuntos los *automizadores* de P como

- $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(X)}(P)$, al grupo de automorfismos de P en $\mathfrak{X}(X)$.
- $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}^{\mathfrak{X}(X)}}(P)$ al grupo de automorfismos de P en $\mathcal{F}^{\mathfrak{X}(X)}$.
- $\mathcal{F}_0^{\mathfrak{X}(X)}(P)$ al grupo de morfismos en $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(X)}(P)$ de la forma (φ, id_X) tales que id_X sea φ-equivariante.
- $\Sigma^{\mathfrak{X}(X)}(P)$ al conjunto de permutaciones de X que aparecen en la segunda coordenada de los morfismos en $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(X)}(P)$.

- $\Sigma_0^{\mathfrak{X}(X)}(P)$ al conjunto de morfismos en $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(X)}(P)$ de la forma (id_P, σ) donde las permutaciones σ sean id_P-equivariantes.

Es fácil ver que todos son grupos. Los conceptos en 3.16 difieren de los dados en 3.15 en el hecho de que los últimos dependen del uso de un grupo G, lo cual termina sin ser de ayuda para el estudio de los sistemas de acción de fusión que no sean basados en un p-grupo S relativos a un grupo G actuando sobre un conjunto X. En este sentido, la definición 3.16 es más general y se pueden usar con independencia de si el sistema de acción de fusión es relativo a la acción de un G o no.

Definición 3.17. Dado un sistema de acción de fusión $\mathfrak{X}(X)$, y un subgrupo $P \leq S$. Se definen los siguientes conceptos:

- P es *totalmente normalizado en* $\mathfrak{X}(X)$ si $|N_S(P)| \geq |N_S(P')|$ para todo $P' \cong_{\mathfrak{X}(X)} P$.
- P es *totalmente centralizado en* $\mathfrak{X}(X)$ si $|C_S(P)| \geq |C_S(P')|$ para todo $P' \cong_{\mathfrak{X}(X)} P$.
- P es *totalmente X-normalizado en* $\mathfrak{X}(X)$ si $|N_S(P;X)| \geq |N_S(P';X)|$ para todo $P' \cong_{\mathfrak{X}(X)} P$.
- P es *totalmente X-centralizado en* $\mathfrak{X}(X)$ si $|C_S(P;X)| \geq |C_S(P';X)|$ para todo $P' \cong_{\mathfrak{X}(X)} P$.

De los conceptos dados sobre subgrupos totalmente normalizados y totalmente centralizados en un sistema de acción de fusión, podemos ver que ambas definiciones no tiene relación con el sistema de acción de fusión $\mathfrak{X}(X)$ que se quiera considerar.

De esto, también podemos ver que los conceptos no difieren de los totalmente normalizados y totalmente centralizados dados para sistemas de fusión. Por ello, de las pruebas dadas en el capítulo anterior sobre sistemas de fusión basados en un p-Sylow relativos a un grupo G, podemos recuperar lo siguiente:

Lema 3.18. Dado un sistema de acción de fusión $\mathfrak{X}_S(G, X)$ basado sobre un p-Sylow S relativo a un grupo G actuando sobre un conjunto X, si un subgrupo $P \leq S$ es totalmente normalizado, entonces $N_S(P) \in \mathrm{Syl}_p(N_G(P))$.

Prueba. Análoga a la prueba dada en 2.12. $\square$

Lema 3.19. Dado un sistema de acción de fusión $\mathfrak{X}_S(G, X)$ basado sobre un p-Sylow S relativo a un grupo G actuando sobre un conjunto X, si un subgrupo $P \leq S$ es totalmente centralizado, entonces $C_S(P) \in \mathrm{Syl}_p(C_G(P))$.

Prueba. Análoga a la dada en el lema 3.18. $\square$

Para el caso de los subgrupos X-normalizados y los X-centralizados, es posible dar el mismo resultado que los dos anteriores y afirmar que:

Lema 3.20. Dado un sistema de acción de fusión $\mathfrak{X}_S(G, X)$ basado sobre un p-Sylow S relativo a un grupo G actuando sobre un conjunto X, si un subgrupo $P \leq S$ es totalmente X-normalizado, entonces $N_S(P; X) \in \mathrm{Syl}_p(N_G(P; X))$.

Lema 3.21. Dado un sistema de acción de fusión $\mathfrak{X}_S(G, X)$ basado sobre un p-Sylow S relativo a un grupo G actuando sobre un conjunto X, si un subgrupo $P \leq S$ es totalmente X-centralizado, entonces $C_S(P; X) \in \mathrm{Syl}_p(C_G(P; X))$.

La prueba de ambos lemas es análoga a las dadas en el lema 3.18.

Definición 3.22. Sea S un p-grupo y $\mathfrak{X}_S(X)$ un sistema de acción de fusión basado en S. Se dice que $\mathfrak{X}_S(X)$ es *saturado* si

I) Dado $P \leq S$, se cumplen las siguientes implicaciones:

$$\begin{tikzcd}
P \text{ es totalmente normalizado} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & P \text{ es totalmente } X\text{-normalizado} \arrow[d, Rightarrow] \\
P \text{ es totalmente centralizado} \arrow[r, Rightarrow] & P \text{ es totalmente } X\text{-centralizado.}
\end{tikzcd}$$

II) Si P es totalmente normalizado, entonces

- $\mathrm{Aut}_S(P) \in \mathrm{Syl}_p(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}^{\mathfrak{X}_S(X)}}(P))$.
- $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P) \in \mathrm{Syl}_p(\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}_S(X)}(P))$.
- $\Sigma^{\mathfrak{X}(S,X)}(P) \in \mathrm{Syl}_p(\Sigma^{\mathfrak{X}_S(X)}(P))$.

III) Si P es totalmente X-normalizado, entonces $\mathcal{F}_0^{\mathfrak{X}(S,X)}(P) \in \mathrm{Syl}_p(\mathcal{F}_0^{\mathfrak{X}_S(X)}(P))$.

IV) Si P es totalmente centralizado, entonces $\Sigma_0^{\mathfrak{X}(S,X)}(P) \in \mathrm{Syl}_p(\Sigma_0^{\mathfrak{X}_S(X)}(P))$.

V) Si $P \leq S$ y $(\varphi, \sigma) \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{X}(X)}(P, P')$ es tal que $\varphi(P)$ es totalmente X-centralizado y definimos[†]

$$N_{(\varphi,\sigma)} := \{g \in N_S(P) \mid (\varphi \circ c_g \circ \varphi^{-1}, \sigma \circ \ell_g \circ \sigma^{-1}) \in \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(\varphi(P))\},$$

entonces existe un $(\widetilde{\varphi}, \sigma) \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{X}(X)}(N_{(\varphi,\sigma)}, S)$ tal que $\varphi = \widetilde{\varphi}|_P$.

A estas condiciones se les llamarán *axiomas de saturación de sistemas de acción de fusión.*

Gelvin refiere a los puntos $I - IV$ como las *Condiciones de Sylow* para sistemas de acción de fusión saturados, es decir, el análogo a los Axiomas de Sylow para sistemas de fusión saturados. De forma análoga, el punto V es la *Condición de Extensión* para sistemas de acción de fusión saturados.

Una de las cuestiones importantes es resaltar el hecho de que todo sistema de acción de fusión basado en un p-Sylow S relativo a un grupo G actuando sobre un conjunto X sea saturado.

Teorema 3.23. *Dado un sistema de acción de fusión $\mathfrak{X}_S(G, X)$ sobre un p-Sylow S relativo al grupo G actuando sobre un conjunto X, se cumple que si P es totalmente normalizado,*

[†]Gelvin refiere a $N_{(\varphi,\sigma)}$ como el *extendedor* de un sistema de acción de fusión sin contemplar la posibilidad de dar sistemas de acción de fusión independientes de un grupo. Con esta definición, sustituyendo a c_g por φ y σ por ℓ_g, pese a ser un cambio mínimo, abre la posibilidad a ser considerada en caso de que sean definidos sistemas de acción de fusión *exóticos*

entonces

- $\mathrm{Aut}_S(P) \in \mathrm{Syl}_p(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_S(G)}(P))$.
- $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P) \in \mathrm{Syl}_p(\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}_S(G,X)}(P))$.
- $\Sigma^{\mathfrak{X}(S,X)}(P) \in \mathrm{Syl}_p(\Sigma^{\mathfrak{X}_S(G,X)}(P))$.

Más aún, si P es totalmente normalizado, entonces es totalmente centralizado, totalmente X-normalizado y totalmente X-centralizado.

***Prueba**.* Por el teorema 2.16, podemos recuperar que si un subgrupo es totalmente normalizado, entonces también será totalmente centralizado, además de que ocurrirá que $\mathrm{Aut}_S(P) \in \mathrm{Syl}_p(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_S(G)}(P))$.

Para la segunda parte, consideremos $|N_G(P)| = p^\alpha q$ y $|C_G(P;X)| = p^\beta r$ donde $(p, qr) = 1$. Recordemos que $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P) \leq \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}_S(G,X)}(P)$ y que $N_S(P)$, $C_S(P;X)$ y $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P)$ son p-grupos. Como $N_S(P) \in \mathrm{Syl}_p(N_G(P))$ por ser P totalmente normalizado, tendremos que

$$\frac{|N_S(P)|}{|C_S(P;X)|} = |\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P)| = p^{\alpha-\tau},$$

donde $\tau \leq \beta$. Sin embargo, $p^{\alpha-\tau}$ divide a $p^{\alpha-\beta}(q/r)$, pero como $(p, qr) = 1$, esto implica que $p^{\alpha-\tau}$ divide a $p^{\alpha-\beta}$. Consecuentemente $\beta \leq \tau$, lo cual junto a la primera desigualdad, implicará que ambos sean iguales. Por tanto $|C_S(P;X)| = p^\beta$, implicando que $C_S(P;X) \in \mathrm{Syl}_p(C_G(P;X))$, y que $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)} \in \mathrm{Syl}_p(\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}_S(G,X)}(P))$.

Para el último inciso, recordemos que $|\Sigma^{\mathfrak{X}_S(G,X)}(P)| = |N_G(P)|/|N_G(P;X)|$. Considerando también que $\Sigma^{\mathfrak{X}(S,X)}(P) = |N_S(P)|/|N_S(P;X)|$, nuevamente al ser totalmente normalizado P, se tiene que $N_S(P) \in \mathrm{Syl}_p(N_G(P))$. Suponiendo que $|N_G(P;X)| = p^\theta s$ y también que $|N_G(P;X)| = p^\mu z$ con $(p, sz) = 1$ y $\mu \leq \theta$, tendremos que, aún considerando $|N_G(P)| = p^\alpha q$,

$$\frac{|N_S(P)|}{|N_S(P;X)|} = |\Sigma^{\mathfrak{X}(S,X)}(P)| = p^{\alpha-\mu}.$$

De la ecuación anterior, nuevamente $p^{\alpha-\mu}$ divide a $p^{\alpha-\theta}(s/z)$, que implica que $p^{\alpha-\mu}$ divida a $p^{\alpha-\theta}$, forzando que ocurra la desigualdad $\theta \leq \mu$, haciendo que $\mu = \theta$. Por lo tanto, $N_S(P;X) \in \mathrm{Syl}_p(N_G(P;X))$, lo que implica que sea totalmente X-normalizado y que $\Sigma^{\mathfrak{X}(S,X)} \in \mathrm{Syl}_p(\Sigma^{\mathfrak{X}_S(G,X)})$. $\square$

Del teorema anterior, podemos obtener que un sistema de acción de fusión $\mathfrak{X}_S(G,X)$ basado en un p-sylow X relativo a un grupo G actuando sobre un conjunto X siempre cumple el segundo inciso de los axiomas de saturación para sistemas de acción de fusión. También implica parte del primer inciso, dado que podemos apreciar que si un subgrupo es totalmente normalizado, implicará ser totalmente centralizado, X-normalizado y X-centralizado.

Teorema 3.24. *Dado un sistema de acción de fusión $\mathfrak{X}_S(G,X)$ sobre un p-Sylow S relativo al grupo G actuando sobre un conjunto X, se cumple que si P es totalmente X-normalizado, entonces $\mathcal{F}_0^{\mathfrak{X}(S,X)}(P) \in \mathrm{Syl}_p(\mathcal{F}_0^{\mathfrak{X}_S(G,X)}(P))$ y P es totalmente X-centralizado.*

Prueba. Como P es totalmente X-normalizado, tendremos que $N_S(P;X) \in \mathrm{Syl}_p(N_G(P;X))$. Recordemos que, por como definimos los G-automizadores, se tendrá que $|\mathcal{F}_0^{\mathfrak{X}(S,X)}(P)| = |N_S(P;X)|/|C_S(P;X)|$ y que $|\mathcal{F}_0^{\mathfrak{X}_S(G,X)}(P)| = |N_G(P;X)|/|C_G(P;X)|$. Si $|N_G(P;X)| = p^\alpha q$, entonces $|N_S(P;X)| = p^\alpha$, por ser P totalmente X-normalizado. Si $|C_G(P;X)| = p^\theta r$ con $(p,r)=1$, supongamos que $|C_S(P;X)| = p^\mu$ con $\mu \leq \theta$, tendremos que

$$\frac{|N_S(P;X)|}{|C_S(P;X)|} = |\mathcal{F}_0^{\mathfrak{X}(S,X)}(P)| = p^{\alpha-\mu},$$

implicando que $p^{\alpha-\mu}$ divida a $p^{\alpha-\theta}$ por tenerse que $\mathcal{F}_0^{\mathfrak{X}(S,X)}(P) \leq \mathcal{F}_0^{\mathfrak{X}_S(G,X)}(P)$. De lo anterior, se obtiene que $\theta \leq \mu$, y por tanto $\mu = \theta$. Consecuentemente $C_S(P;X) \in \mathrm{Syl}_p(C_G(P;X))$, implicando que P es totalmente X-centralizado y que $\mathcal{F}_0^{\mathfrak{X}(S,X)}(P) \in \mathrm{Syl}_p(\mathcal{F}_0^{\mathfrak{X}_S(G,X)}(P))$ $\square$

Teorema 3.25. *Dado un sistema de acción de fusión $\mathfrak{X}_S(G,X)$ sobre un p-Sylow S relativo al grupo G actuando sobre un conjunto X, se cumple que si P es totalmente centralizado, entonces $\Sigma_0^{\mathfrak{X}(S,X)}(P) \in \mathrm{Syl}_p(\Sigma_0^{\mathfrak{X}_S(G,X)}(P))$ y P es totalmente X-centralizado.*

Prueba. La prueba es análoga a la dada en el teorema 3.24, considerando que si P es totalmente centralizado, entonces $C_S(P) \in \mathrm{Syl}_p(C_G(P))$, que $|\Sigma_0^{\mathfrak{X}_S(G,X)}(P)| = |C_G(P)|/|C_G(P;X)|$ y que $|\Sigma_0^{\mathfrak{X}(S,X)}(P)| = |C_S(P)|/|C_S(P;X)|$. $\square$

Los teoremas 3.23,3.24 y 3.25 demuestran que para cualquier sistema de acción de fusión de la forma $\mathfrak{X}_S(G,X)$, siempre se cumplirán el segundo, tercer y cuarto axioma de saturación respectivamente. Además, considerándolos en conjunto, demuestran el primer axioma de saturación debido a las implicaciones en sus pruebas.

Finalmente, el quinto axioma para sistemas de acción de fusión saturados también es adaptable a un sistema de acción de fusión de la forma $\mathfrak{X}_S(G, X)$.

Teorema 3.26. *Dado un sistema de acción de fusión $\mathfrak{X}_S(G, X)$ sobre un p-Sylow S relativo al grupo G actuando sobre un conjunto X, se cumple que si consideramos un $g \in G$ tal que gPg^{-1} es totalmente X-centralizado en $\mathfrak{X}_S(G, X)$, entonces existe un $g' \in G$ tal que $g'N_{(c_g,\ell_g)} \leq S$ y que $(c_{g'}, \ell_{g'})|_P = (c_g, \ell_g)$. Dicho de otra forma, existe un morfismo $(c_{g'}, \ell_{g'}) \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{X}_S(G,X)}(N_{(c_g,\ell_g)}, S)$ tal que extienda a (c_g, ℓ_g).*

Prueba. Si gPg^{-1} es totalmente X-centralizado, entonces, considerando que $N_S(gPg^{-1}) \cdot C_G(gPg^{-1}; X) = C_S(gPg^{-1})$, tendremos que

$$[N_S(gPg^{-1}) \cdot C_G(gPg^{-1}; X) : N_S(gPg^{-1})] = \frac{|N_S(gPg^{-1})| \cdot |C_G(gPg^{-1})|}{C_S(gPg^{-1})} \Bigg/ |N_S(gPg^{-1})|$$

que es equivalente a afirmar que

$$[N_S(gPg^{-1}) \cdot C_G(gPg^{-1}; X) : N_S(gPg^{-1})] = [C_G(gPg^{-1}) : C_S(gPg^{-1})].$$

De lo anterior, es claro que al ser X-centralizado, podemos afirmar que $C_S(gPg^{-1}) \in \mathrm{Syl}_p(C_G(gPg^{-1}))$, por tanto el índice de $N_S(gPg^{-1})$ en $N_S(gPg^{-1}) \cdot C_G(gPg^{-1}; X)$ es primo relativo con p. Por lo tanto, recordando que $N_S(gPg^{-1})$ es un p-grupo, podemos afirmar ahora que $N_S(gPg^{-1}) \in \mathrm{Syl}_p(N_S(gPg^{-1}) \cdot C_G(gPg^{-1}; X))$.

Ahora, por como se definió el extendedor $N_{(c_g,\ell_g)}$, entonces $gN_{(c_g,\ell_g)}g^{-1}$ será un p-subgrupo de $N_S(gPg^{-1}) \cdot C_G(gPg^{-1}; X)$. Además, como $C_G(gPg^{-1}; X)$ tiene índice potencia de un primo en $N_S(gPg^{-1}) \cdot C_G(gPg^{-1}; X)$, entonces existe un elemento $z \in C_G(gPg^{-1}; X)$ tal que $zgN_{(c_g,\ell_g)}(zg)^{-1} \leq N_S(gPg^{-1})$.

Considerando $g' = zg$, tendremos que $c_{g'}$ es el homomorfismo que buscamos. $\square$

Con la prueba de este último teorema, se demuestra que todo sistema de acción de fusión basado en un p-Sylow S relativo a un grupo G actuando sobre un conjunto X, todos los axiomas de saturación se cumplen sobre él. Por tanto, podemos afirmar que:

Corolario 3.27. Todo sistema de acción de fusión basado en un p-Sylow S relativo a un grupo G actuando sobre un conjunto X es un sistema de acción de fusión saturado.

Prueba. Es una implicación de los teoremas 3.23,3.24,3.25 y 3.26. $\square$

Teorema 3.28. *Si un sistema de acción fusión $\mathfrak{X}(X)$ es saturado, el sistema de fusión subyacente $\mathcal{F}^{\mathfrak{X}(X)}$ es saturado también.*

Prueba. Dado $P \leq S$, por los axiomas de saturación de un sistema de acción de fusión, si P es totalmente normalizado, entonces también es totalmente centralizado, y $\mathrm{Aut}_S(P) \in \mathrm{Syl}_p(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}^{\mathfrak{X}(X)}}(P))$, que es la condición de Sylow para sistemas de fusión.

Para la segunda condición, si consideramos un $P \leq S$ y $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}^{\mathfrak{X}(X)}}(P, P')$ tal que $\varphi(P) = P'$ es totalmente centralizado, necesitamos obtener un $\overline{\varphi} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}^{\mathfrak{X}(X)}}(N_\varphi, Q)$ tal que $\overline{\varphi}|_P = \varphi$.

Como $\varphi \in \mathrm{Iso}_{\mathcal{F}^{\mathfrak{X}(X)}}(P, P')$, existe $\sigma \in \Sigma_X$ tal que $(\varphi, \sigma) \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{X}(X)}(P, P')$. Consideremos

$$N_{(\varphi,\sigma)} = \{g \in N_S(P) \mid (\varphi c_g \varphi^{-1}, \sigma \ell_g \sigma^{-1}) \in \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P)\}.$$

Claramente $N_{(\varphi,\sigma)} \leq N_\varphi$, su análogo en sistemas de fusión, pues N_φ se define como

$$N_\varphi = \{g \in N_S(P) \mid \varphi c_g \varphi^{-1} \in \mathrm{Aut}_S(P)\}$$

y la condición impuesta en $N_{(\varphi,\sigma)}$ sobre la segunda coordenada implica que tendrá menor o igual cantidad de elementos que N_φ. Ahora queremos ver que $N_{(\varphi,\sigma)}$ nos servirá para generar la extensión, utilizando la condición de extensión de los sistemas de acción de fusión.

Definamos la función $\delta\colon N_\varphi \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(X)}(P)$ donde para todo $g \in N_\varphi$, la imagen será $\delta(g) = (c_g, \ell_g)$. Claramente es un homomorfismo de grupos.

Dado que $\varphi \in \mathcal{F}^{\mathfrak{X}(X)}$, es claro que podemos considerar y fijar un $\sigma \in \Sigma_X$ tal que $(\varphi, \sigma) \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{X}(X)}(P, P')$. Denotemos por $N \leq \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(X)}(P')$ al grupo $(\varphi, \sigma) \circ \delta(N_\varphi) \circ (\varphi, \sigma)^{-1}$ que equivale al grupo

$$N = \{(\varphi c_g \varphi^{-1}, \sigma \ell_g \sigma^{-1}) \mid g \in N_\varphi\}$$

Como N_φ es un p-grupo, entonces N también lo será. Si $N \leq \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}_S(X)}(P')$, implica que para todo elemento en N_φ, $(\varphi c_g \varphi^{-1}, \sigma \ell_g, \sigma^{-1}) \in \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P')$, y por tanto, todos los elementos de N_φ están en $N_{(\varphi,\sigma)}$. Consecuentemente $N_\varphi \leq N_{(\varphi,\sigma)}$, viendo así junto con la primera contención trivial que $N_\varphi = N_{(\varphi,\sigma)}$. Entonces es posible aplicar la condición de extensión de los sistemas de acción de fusión saturados para (φ, σ) y obtener $(\widetilde{\varphi}, \sigma) \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{X}(X)}(N_{(\varphi,\sigma)}, S)$. Por esta última contención y por ser $N_\varphi = N_{(\varphi,\sigma)}$, $\widetilde{\varphi} \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}^{\mathfrak{X}(\mathrm{X})}}(N_\varphi)$, lo que probaría el axioma de extensión para $\mathcal{F}^{\mathfrak{X}(X)}$.

Si $N_\varphi \neq N_{(\varphi,\sigma)}$, es fácil notar que el conjunto N termina satisfaciendo $N \leq \Sigma_0^{\mathfrak{X}(X)}(P') \cdot \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P')$, ya que cualquier elemento $(\varphi c_g \varphi^{-1}, \sigma \ell_g \sigma^{-1})$ con $g \in N_\varphi$ diferiría de $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P')$ por un elemento de la forma $(\mathrm{id}_P, \mu) \in \Sigma_0^{\mathfrak{X}(X)}(P')$.

Ahora probaremos que $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P')$ es un p-subgrupo de Sylow de $\Sigma_0^{\mathfrak{X}(X)}(P') \cdot \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P')$. Consideremos

$$[\Sigma_0^{\mathfrak{X}(X)}(P') \cdot \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P')\colon \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P')] = \frac{|\Sigma_0^{\mathfrak{X}(X)}(P') \cdot \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P')|}{|\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P')|}.$$

Utilizando las siguientes identidades:

$$|\Sigma_0^{\mathfrak{X}(X)}(P') \cdot \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P')| = \frac{|\Sigma_0^{\mathfrak{X}(X)}(P')| \cdot |\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P')|}{|\Sigma_0^{\mathfrak{X}(X)}(P') \cap \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P')|},$$

$$[\Sigma_0^{\mathfrak{X}(X)}(P') \cdot \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P')\colon \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P')] = \frac{|\Sigma_0^{\mathfrak{X}(X)}(P')|}{|\Sigma_0^{\mathfrak{X}(X)}(P') \cap \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P')|}$$

tendremos por tanto

$$[\Sigma_0^{\mathfrak{X}(X)}(P') \cdot \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P')\colon \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P')] = [\Sigma_0^{\mathfrak{X}(X)}(P') : \Sigma_0^{\mathfrak{X}(X)}(P') \cap \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P')].$$

Ahora, por definición tenemos que

$$\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P') = \{(\varphi,\sigma) \in \mathrm{Aut}_S(P') \times \Sigma_X \mid \varphi = c_s \text{ y } \sigma = \ell_s \text{ para cierto } s \in S\},$$

lo que hace claro el que sea un p-grupo. Considerando también la definición del conjunto

$$\Sigma_0^{\mathfrak{X}(X)}(P') = \{(\mathrm{id}_{P'},\sigma) \in \{\mathrm{id}_{P'}\} \times \Sigma_X \mid (\mathrm{id}_P,\sigma) \in \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(X)}(P)\},$$

podemos afirmar, únicamente contando con sus definiciones, que

$$\Sigma_0^{\mathfrak{X}(X)}(P') \cap \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P') = \Sigma_0^{\mathfrak{X}(S,X)}(P'),$$

y por el cuarto axioma para sistemas de acción de fusión saturados, podemos decir que $\Sigma_0^{\mathfrak{X}(S,X)}(P') \in \mathrm{Syl}_p(\Sigma_0^{\mathfrak{X}(X)}(P'))$. Al ser $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P')$ un $p-$grupo y tener

$$[\ \Sigma_0^{\mathfrak{X}(X)}(P') \cdot \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P') \colon \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P')\ ] = [\Sigma_0^{\mathfrak{X}(X)}(P')\ :\ \Sigma_0^{\mathfrak{X}(S,X)}(P')],$$

tendremos que $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P') \in \mathrm{Syl}_p(\Sigma_0^{\mathfrak{X}(X)}(P') \cdot \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P'))$. Como N es un p-subgrupo de $\Sigma_0^{\mathfrak{X}(X)}(P') \cdot \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P')$, entonces existe un (id_P,τ) tal que $(\mathrm{id}_P,\tau) \circ N \circ (\mathrm{id}_P,\tau^{-1}) \leq \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P')$. Por lo anterior podemos aplicar el caso cuando $N_\varphi \leq \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P')$. Por la definición de los conjuntos, $N_\varphi = N_{(\varphi,\tau\sigma\tau^{-1})}$ y podemos concluir que es válido el axioma de extensión de sistemas de fusión saturados para $\mathcal{F}^{\mathfrak{X}(X)}$.

□

Teorema 3.29. *Sea S un p-grupo. Fijemos un sistema de acción de fusión saturado $\mathfrak{X}(X)$ basado en S sobre un conjunto X y sea P un subgrupo de S. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- *P es totalmente normalizado en $\mathcal{F}^{\mathfrak{X}(X)}$.*
- *P es totalmente centralizado en $\mathcal{F}^{\mathfrak{X}(X)}$ y $\mathrm{Aut}_S(P) \in \mathrm{Syl}_p(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}^{\mathfrak{X}(X)}}(P))$.*
- *P es totalmente X-normalizado en $\mathcal{F}^{\mathfrak{X}(X)}$ y $\Sigma^{\mathfrak{X}(S,X)}(P) \in \mathrm{Syl}_p(\Sigma^{\mathfrak{X}(X)}(P))$.*
- *P es totalmente X-centralizado en $\mathcal{F}^{\mathfrak{X}(X)}$ y $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P) \in \mathrm{Syl}_p(\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(X)}(P))$.*

Prueba. Por los axiomas de saturación para sistemas de acción de fusión saturados, es claro que que el primer inciso implica los otros tres. Por tanto el teorema puede reducirse a probar que si se tiene alguna de las otras condiciones, se cumplirá la primera.

2) $\Rightarrow$ 1) Considerando el sistema de acción de fusión $\mathfrak{X}(S,X)$, por como se define un sistema de acción de fusión de la forma $\mathfrak{X}(X)$, es necesario que $\mathfrak{X}(S,X) \subseteq \mathfrak{X}(X)$. Ahora, usando las secuencias exactas obtenidas del diagrama de los automizadores, tendremos lo siguiente:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Sigma_0^{\mathfrak{X}(X)}(P) \arrow[r] & \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(X)}(P) \arrow[r] & \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}^{\mathfrak{X}(\mathrm{X})}}(P) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Sigma_0^{\mathfrak{X}(S,X)}(P) \arrow[r] \arrow[u, hook, "\text{Sylow}"] & \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P) \arrow[r] \arrow[u, hook] & \mathrm{Aut}_S(P) \arrow[r] \arrow[u, hook, "\text{Sylow}"'] & 0.
\end{tikzcd}$$

Dado que $\mathfrak{X}(S,X) \subseteq \mathfrak{X}(X)$, entonces todas las inclusiones son válidas. Por otra parte, si $|\Sigma_0^{\mathfrak{X}(X)}(P)| = p^\alpha k$ y $|\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(X)}(P)| = p^\beta q$, con $(kq,p) = 1$, tendremos que

$$|\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}^{\mathfrak{X}(\mathrm{X})}}(P)| = \frac{|\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(X)}(P)|}{|\Sigma_0^{\mathfrak{X}(X)}(P)|} = \frac{p^\alpha k}{p^\beta q} = p^{\alpha-\beta}(k/q).$$

Por hipótesis, $\mathrm{Aut}_S(P) \in \mathrm{Syl}_p(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}^{\mathfrak{X}(\mathrm{X})}}(P))$, y por el cuarto axioma de sistemas de acción de fusión saturados, $\Sigma_0^{\mathfrak{X}(S,X)}(P) \in \mathrm{Syl}_p(\Sigma_0^{\mathfrak{X}(X)}(P))$. Luego $|\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P)| = p^\alpha$ y $|\Sigma_0^{\mathfrak{X}(S,X)}(P)| = p^\beta$, y usando la estructura de $\mathrm{Aut}_S(P)$ como cociente de grupos de una sucesión exacta, ocurrirá que

$$|\mathrm{Aut}_S(P)| = \frac{|\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P)|}{|\Sigma_0^{\mathfrak{X}(S,X)}(P)|} = \frac{p^\alpha}{p^\beta} = p^{\alpha-\beta}.$$

Esto implica que $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P)$ es un p-subgrupo de Sylow de $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(X)}(P)$.

Sea Q un subgrupo totalmente normalizado $\mathfrak{X}(X)$-conjugado a P y sea $(\varphi,\sigma) \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{X}(X)}(Q,P)$. Es claro que tendremos que

$$(\varphi,\sigma)\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(Q)(\varphi,\sigma)^{-1} \leq \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(X)}(P).$$

Es evidente que $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(Q)$ es un p-grupo y por tanto $(\varphi,\sigma)\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(Q)(\varphi,\sigma)^{-1}$ también lo será. Más aún, al ser p-subgrupo de $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(X)}(P)$, existe un $(\psi,\tau) \in \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(X)}(P)$ tal que

$$(\psi\varphi,\tau\sigma)\mathrm{Aut}_S(Q)(\psi\varphi,\tau\sigma)^{-1} \leq \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P),$$

pues $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P)$ es un p-Sylow de $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(X)}(P)$.

Si consideramos el homomorfismo $\delta\colon N_S(Q) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(X)}(Q)$ y la definición de $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(Q)$, se tiene que la imagen de $N_S(Q)$ bajo δ es justamente $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(Q)$. Por otra parte, dado que P es totalmente centralizado, es X-centralizado. Entonces por el quinto axioma de sistemas de acción de fusión saturados, es posible obtener una extensión $(\widetilde{\psi\varphi}, \tau\sigma)$ en $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{X}(X)}(N_{(\psi\varphi,\tau\sigma)}, S)$ del morfismo $(\psi\varphi, \tau\sigma)$. De aquí, como $N_S(Q)$ tiene su imagen bajo δ es $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(Q)$, entonces $N_S(Q) = N_{(\varphi,\sigma)}$, probando así que el morfismo puede verse en $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{X}(X)}(N_S(Q), S)$. Recordemos que aplicando $\widetilde{\psi\varphi}$, a Q, su imagen será P por ser extensión del morfismo $\psi\varphi$. Dado que para cualquier $q \in Q$ y $n \in N_S(Q)$ se cumple $nqn^{-1} = q'$ para cierto $q' \in Q$, se tendrá que aplicando $\widetilde{\psi\varphi}$,

$$p' = \widetilde{\psi\varphi}(q') = \widetilde{\psi\varphi}(nqn^{-1}) = (\widetilde{\psi\varphi}(n))p(\widetilde{\psi\varphi}(n^{-1}))$$

para ciertos $p, p' \in P$. Con esta identidad, es claro que todo elemento en $\widetilde{\psi\varphi}(N_S(Q))$ normaliza a P. Tendremos que $\widetilde{\psi\varphi}(N_S(Q)) \leq N_S(P)$. Recordando que por ser Q totalmente normalizado se tiene que $|N_S(P)| \leq |N_S(Q)|$, como $\psi\varphi$ es inyectiva, $|\psi\varphi(N_S(Q))| = |N_S(P)|$. Por tanto $|N_S(Q)| = |N_S(P)|$, probando así que P es totalmente normalizado.

3) $\Rightarrow$ 1) Como P es totalmente X-normalizado, se tiene por el segundo axioma de los sistemas de acción de fusión saturados que $\mathcal{F}_0^{\mathfrak{X}(S,X)}(P) \in \mathrm{Syl}_p(\mathcal{F}_0^{\mathfrak{X}(X)}(P))$. Por otra parte, por hipótesis tenemos que $\Sigma^{\mathfrak{X}(S,X)}(P) \in \mathrm{Syl}_p(\Sigma^{\mathfrak{X}(X)}(P))$. Consideremos entonces nuevamente las sucesiones exactas cortas dadas en los conceptos de automizadores:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{F}_0^{\mathfrak{X}(X)}(P) \arrow[r] & \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(X)}(P) \arrow[r] & \Sigma^{\mathfrak{X}(X)}(P) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}_0^{\mathfrak{X}(S,X)}(P) \arrow[r] \arrow[u, hook, "\text{Sylow}"] & \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P) \arrow[r] \arrow[u, hook] & \Sigma^{\mathfrak{X}(S,X)}(P) \arrow[r] \arrow[u, hook, "\text{Sylow}"'] & 0.
\end{tikzcd}$$

Por un argumento parecido al de la implicación 2) $\Rightarrow$ 1), podemos ver fácilmente que $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P)$ debe ser un p-subgrupo de Sylow de $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(X)}(P)$. Dado que P es X-normalizado, implica por los axiomas de sistemas de acción de fusión que también es X-centralizado. Con esta última afirmación, haciendo exactamente la misma demostración del inciso anterior, es posible concluir.

4) $\Rightarrow$ 1). Se puede concluir exactamente de la misma forma que se concluye en 2) $\Rightarrow$ 1) y 3) $\Rightarrow$ 1).

$\square$

Teorema 3.30. *Sea S un p-grupo. Dado un sistema de acción de fusión $\mathfrak{X}(X)$ basado en S actuando sobre un conjunto X y un subgrupo P de S, se tiene que P es totalmente centralizado si y sólo si P es totalmente X-centralizado y $\Sigma_0^{\mathfrak{X}(S,X)}(P) \in \mathrm{Syl}_p(\Sigma_0^{\mathfrak{X}(X)}(P))$.*

Prueba. La primera implicación es obvia dado que es dada por los axiomas de los sistemas de acción de fusión saturados.
Tenemos que por definición

$$|C_S(P)| = |C_S(P;X)| \cdot |\Sigma_0^{\mathfrak{X}(S,X)}(P)|.$$

Como P es X-centralizado, para todo $P \cong_{\mathfrak{X}} Q$, se tendrá que $|C_S(P;X)| \geq |C_S(Q;X)|$. Por otra parte, $\Sigma_0^{\mathfrak{X}(X)}(P) \cong \Sigma_0^{\mathfrak{X}(X)}(Q)$ mediante una conjugación. De lo anterior es fácil ver que $|\Sigma_0^{\mathfrak{X}(S,X)}(P)| \geq |\Sigma_0^{\mathfrak{X}(S,X)}(Q)|$ para todo $Q \cong_{\mathfrak{X}(X)} P$, pues por hipótesis $\Sigma_0^{\mathfrak{X}(S,X)}(P) \in \mathrm{Syl}_p(\Sigma_0^{\mathfrak{X}(X)}(P))$. Entonces se cumplirá para todo $Q \cong_{\mathfrak{X}(X)} P$ que

$$|C_S(P)| = |C_S(P;X)| \cdot |\Sigma_0^{\mathfrak{X}(S,X)}(P)| \geq |C_S(Q;X)| \cdot |\Sigma_0^{\mathfrak{X}(S,X)}(Q)| = |C_S(Q)|,$$

lo que implica que necesariamente P sea totalmente centralizado por definición.

$\square$

Teorema 3.31. *Sea S un p-grupo. Dado un sistema de acción de fusión $\mathfrak{X}(X)$ basado en S actuando sobre un conjunto X y un subgrupo P de S, se tiene que P es totalmente X-normalizado si y sólo si P es totalmente X-centralizado y $\mathcal{F}_0^{\mathfrak{X}(S,X)}(P) \in \mathrm{Syl}_p(\mathcal{F}^{\mathfrak{X}(X)}(P))$.*

Prueba. La primera parte de la prueba es implicación de los axiomas de saturación de los sistemas de acción de fusión saturados.
Por la identidad $\mathcal{F}_0^{\mathfrak{X}(S,X)}(P) = N_S(P;X)/C_S(P;X)$ dada en 3.15, podemos afirmar que

$$|N_S(P;X)| = |C_S(P;X)| \cdot |\mathcal{F}_0^{\mathfrak{X}(S,X)}(P)|.$$

Aplicando que $\mathcal{F}_0^{\mathfrak{X}(S,X)}(P) \in \mathrm{Syl}_p(\mathcal{F}_0^{\mathfrak{X}(S,X)}(P))$ y que P es X-centralizado implica que para todo $Q \cong_{\mathfrak{X}(X)} P$ es cierto que $|N_S(P;X)| \geq |N_S(Q;X)|$, podemos concluir de la misma forma que en el teorema anterior (3.30).

$\square$

3.3 El teorema de fusión de Alperin en sistemas de acción de fusión saturados

Previo al teorema principal, es requerimento obtener un teorema equivalente a la proposición A2 de [4], la cual fue herramienta para poder extender morfismos en el teorema de Alperin.

Teorema 3.32. *Si $(\varphi, \sigma) \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{X}(X)}(P, P')$ es un isomorfismo tal que P' es totalmente normalizado, entonces hay un morfismo $(\widetilde{\varphi}, \sigma') \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{X}(X)}(N_S(P), S)$ y $(\psi, \tau) \in \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(X)}(P)$ tal que $\widetilde{\varphi}|_P = \varphi \circ \psi$ y que $\sigma' = \sigma \circ \tau$.*

Prueba. Dado que P' es totalmente normalizado, por los axiomas de los sistemas de acción de fusión saturados, se tiene que $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P') \in \mathrm{Syl}_p(\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(X)}(P'))$.

Por construcción, $(\varphi, \sigma) \circ \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P) \circ (\varphi, \sigma)^{-1}$ es un p-subgrupo de $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(X)}(P')$. Entonces es posible obtener un p-subgrupo de Sylow de $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(X)}(P')$ que contenga a $(\varphi, \sigma) \circ \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P) \circ (\varphi, \sigma)^{-1}$, y por tanto existe un morfismo $(\psi, \tau) \in \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(X)}(P')$ tal que

$$(\psi\varphi, \tau\sigma) \circ \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P) \circ (\psi\varphi, \tau\sigma)^{-1} \leq \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P')$$

Sea $(\alpha, \beta) = (\varphi^{-1}\psi\varphi, \tau^{-1}\sigma\tau)$. Entonces

$$(\varphi, \sigma) \circ (\alpha, \beta) \circ \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P) \circ (\alpha, \beta)^{-1} \circ (\varphi, \sigma)^{-1} \leq \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P').$$

Por los axiomas de saturación, al ser P' totalmente normalizado, también es totalmente X-centralizado. Por el quinto axioma de saturación, se puede extender $(\varphi\alpha, \sigma\beta)$ a un morfismo $(\widetilde{\varphi}, \sigma') \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{X}(X)}(N_{(\varphi\alpha,\sigma\beta)}, S)$. Recordemos que

$$N_{(\varphi\alpha,\sigma\beta)} = \{s \in N_S(P) \mid ((\varphi\alpha) \circ c_s \circ (\varphi\alpha)^{-1}, (\sigma\beta) \circ \ell_s \circ (\sigma\beta)^{-1}) \in \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P')\}.$$

De lo anterior, es evidente que $N_{(\varphi\alpha,\sigma\beta)} \leq N_S(P)$ pues $N_{(\varphi\alpha,\sigma\beta)}$ se compone de elementos de $N_S(P)$. Por otra parte, recordemos que

$$N_{\varphi\alpha} = \{s \in N_S(P) \mid (\varphi\alpha)c_s(\varphi\alpha)^{-1} \in \mathrm{Aut}_S(P')\}$$

y al aplicar el morfismo $\delta\colon N_{\varphi\alpha} \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P')$, la imagen de $N_{\varphi\alpha}$ será justamente $(\varphi\alpha,\sigma\beta) \circ \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P) \circ (\varphi\alpha,\sigma\beta)^{-1}$. Por la primera contención, este último grupo está totalmente contenido en $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(X)}(P')$, y por tanto se tiene la igualdad $N_\varphi = N_{(\varphi\alpha,\sigma\beta)}$, y es posible realizar la extensión en $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{X}(X)}(N_S(P), S)$, concluyendo el teorema.

□

Como en el capítulo anterior, se precisa de la definición de subgrupos céntricos y radicales para el teorema de Alperin. Gelvin define los subgrupos céntricos y X-céntricos para sus estructuras en [10], sin embargo no contiene una definición de subgrupo radical ni X-radical para sistemas de acción de fusión.

Definición 3.33. Se dice que $P \leq S$ es *céntrico en el sistema de acción de fusión* si $C_S(P) \leq P$, y para todo $P' \cong_{\mathfrak{X}(X)} P$ se cumple que $C_S(P') \leq P'$.

Definición 3.34. Se dice que $P \leq S$ es *X-céntrico en el sistema de acción de fusión* si $C_S(P;X) \leq P$, y para todo $P' \cong_{\mathfrak{X}(X)} P$ se cumple que $C_S(P';X) \leq P'$.

Es claro que si un subgrupo es céntrico, automáticamente es X-céntrico. Ahora, dada la definición de subgrupo radical en sistemas de fusión, debe adaptarse a la nueva situación, que es considerando morfismos para sistemas de acción de fusión utilizando. Para ello, precisaremos de un concepto apropiado de morfismos internos de un p-grupo P.

Definición 3.35. Dado un sistema de acción de fusión $\mathfrak{X}(X)$ sobre un p-grupo S y un subgrupo $P \leq S$, se define el *grupo de automorfismos internos de P en el sistema de acción de fusión* $\mathfrak{X}(X)$ como el grupo

$$\mathrm{Inn}_{\mathfrak{X}(X)}(P) := \{(\varphi,\sigma) \in \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(X)}(P) \mid \varphi \in \mathrm{Inn}(P)\}$$

donde $\mathrm{Inn}(P)$ es el grupo de automorfismos internos de P.

De este concepto, es fácil ver el siguiente resultado:

Corolario 3.36. El grupo $\mathrm{Inn}_{\mathfrak{X}(X)}(P)$ es normal en $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(X)}(P)$.

Prueba. El subgrupo $\mathrm{Inn}_{\mathfrak{X}(X)}(P)$ es normal si para todo $(\varphi, \sigma) \in \mathrm{Inn}_{\mathfrak{X}(X)}(P)$ y $(\psi, \tau) \in \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(X)}(P)$, se cumple $(\psi\varphi\psi^{-1}, \tau\sigma\tau^{-1}) \in \mathrm{Inn}_{\mathfrak{X}(X)}(P)$, lo cual es cierto si y sólo si $\psi\varphi\psi^{-1} \in \mathrm{Inn}(P)$, lo cual es cierto ya que $\mathrm{Inn}(P) \trianglelefteq \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}^{\mathfrak{X}(X)}}(P)$ (probado en el teorema 2.33).

$\square$

Definición 3.37. Dado un sistema de acción de fusión sobre un p-grupo S y un subgrupo $P \leq S$, se define el *grupo de automorfismos externos de P en el sistema de acción de fusión* $\mathfrak{X}(X)$ como

$$\mathrm{Out}_{\mathfrak{X}(X)}(P) := \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(X)}(P)/\mathrm{Inn}_{\mathfrak{X}(X)}(P)$$

Y en base a esta nueva estructura, es posible obtener la nueva definición de subgrupo radical.

Definición 3.38. Dado un p-grupo S, un subgrupo $P \leq S$ es llamado radical en $\mathfrak{X}(X)$ si $\mathrm{Out}_{\mathfrak{X}(X)}(P)$ es p-reducido.

Para poder dar la definición correcta del concepto de X-radical, como Gelvin definió los "X-subgrupos" en relación al kernel de las acciones del sistema de acción de fusión sobre el conjunto X dado, debería ser una estructura similar. Y para no perder la esencia de un subgrupo radical en un sistema de acción de fusión, debe ser la p-reducibilidad de los automorfismos externos. Por consecuente, es apropiado dar la estructura equivalente en cuanto a $\mathrm{Inn}_{\mathfrak{X}(X)}(P)$.

Definición 3.39. Dado un sistema de acción de fusión $\mathfrak{X}(X)$ sobre un p-grupo S y un subgrupo $P \leq S$, se define el *grupo de automorfismos internos neutros de P en el sistema* *de acción de fusión* $\mathfrak{X}(X)$ como el grupo

$$\mathrm{Inn}_{\mathfrak{X}(X)}(P;X) := \{(\varphi,\sigma) \in \mathcal{F}_0^{\mathfrak{X}(X)}(P) \mid \varphi \in \mathrm{Inn}(P)\}$$

donde $\mathrm{Inn}(P)$ es el grupo de automorfismos internos de P.

De la misma forma que el anterior concepto, es posible afirmar que

Corolario 3.40. El grupo $\mathrm{Inn}_{\mathfrak{X}(X)}(P;X)$ es normal en $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(X)}(P)$.

Prueba. Análoga a la dada en 3.36.

□

Del corolario 3.40, podemos deducir también que sea normal en $\mathcal{F}_0^{\mathfrak{X}(X)}(P)$, por tanto podemos realizar el cociente entre $\mathcal{F}_0^{\mathfrak{X}(X)}(P)$ e $\mathrm{Inn}_{\mathfrak{X}(X)}(P;X)$.

Definición 3.41. Dado un p-grupo S y un subgrupo $P \leq S$, se definen los *automorfismos externos neutros de P en el sistema de acción de fusión* $\mathfrak{X}(X)$ como

$$\mathrm{Out}_{\mathfrak{X}(X)}(P;X) := \mathcal{F}_0^{\mathfrak{X}(X)}(P)/\mathrm{Inn}_{\mathfrak{X}(X)}(P;X).$$

Definición 3.42. Dado un p-grupo S, un subgrupo $P \leq S$ es llamado X-radical en $\mathfrak{X}(X)$ si se tiene que $\mathrm{Out}_{\mathfrak{X}(X)}(P;X)$ es p-reducido.

Con estos conceptos, la idea de que radicalidad implica X-radicalidad es inverso, es decir, si un subgrupo es X-radical, entonces es radical, a diferencia de la relación entre los otros subgrupos y sus "X-formas".

Ya disponiendo del concepto de radical y X-radical, se puede enunciar el teorema de Alperin para sistemas de acción de fusión saturados.

Teorema 3.43. ***(Alperin)*** *Dado un sistema de acción de fusión saturado $\mathfrak{X}(X)$ sobre un grupo S actuando sobre un conjunto X, entonces para cada morfismo $(\varphi, \sigma) \in \mathrm{Iso}_{\mathfrak{X}(X)}(P, P')$ en $\mathfrak{X}(X)$, existe una secuencia de subgrupos de S.*

$$P = P_0, P_1, \ldots, P_k = P' \qquad\qquad Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$$

Y elementos $(\varphi_i, \sigma_i) \in \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(X)}(Q_i)$, tales que:

- *Q_i es totalmente normalizado en $\mathfrak{X}(X)$, céntrico y radical para cada i;*
- *$P_{i-1}, P_i \leq Q_i$ y $\varphi_i(P_{i-1}) = P_i$ para cada i, y*
- *$(\varphi, \sigma) = (\varphi_k, \sigma_k) \circ (\varphi_{k-1}, \sigma_{k-1}) \circ \cdots \circ (\varphi_1, \sigma_1)$.*

Prueba. El proceso de demostración es nuevamente de manera inductiva hacia abajo con respecto al orden del p-grupo P considerado. Si el grupo $P = S$, entonces $P' = S$. Es claro que S es céntrico por cumplirse que $C_S(S) \leq S$ y ser él el único en su clase de conjugación. Por otra parte S es totalmente normalizado en $\mathfrak{X}(X)$, pues el único conjugado con S es él mismo. Por tanto, por el segundo axioma de saturación, se tiene que $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(S) \in \mathrm{Syl}_p(\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}_S(X)}(S))$.

Por esto último, dado que hablamos de S, $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(S) = \mathrm{Inn}_{\mathfrak{X}_S(X)}(S) \leq \mathrm{Inn}_{\mathfrak{X}(X)}(S)$. Consecuentemente $\mathrm{Out}_{\mathfrak{X}(X)}(S)$ es de orden primo relativo con p, por lo que necesariamente S será radical. Entonces podemos extender el morfismo (φ, σ) a sí mismo en $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{X}(X)}(S, S)$ y será en un p-grupo totalmente normalizado, céntrico y radical. Con ello se cumple la base de inducción.

Si ahora suponemos que $P \lneqq S$ (por tanto $|P| < |S|$), sea P^* un subgrupo de S que sea $\mathfrak{X}(X)-$conjugado a P y que sea totalmente normalizado. Si consideremos (ψ, τ) en $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{X}(X)}(P, P^*)$, el teorema se cumple para (φ, σ) en $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{X}(X)}(P, P')$ si se cumple para (ψ, τ) y $(\psi, \tau) \circ (\varphi, \sigma)^{-1} \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{X}(X)}(P', P^*)$. Esto se debe a que si $Q_1, Q_2, \ldots Q_{k_1}$ y $(\psi_i, \tau_i) \in \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(X)}(Q_i)$ son las familias de subgrupos de S y morfismos que cumplen la condición para (ψ, τ) y $R_1, R_2, \ldots, R_{k_2}$ y $(\mu_i, \rho_i) \in \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(X)}(R_j)$ son las familias de subgrupos de S y morfismos que cumplen la condición para $(\psi, \tau) \circ (\varphi, \sigma)^{-1}$, respectivamente, la familia que cumplirá para φ será la cadena de subgrupos formada por estas familias, es decir $\{Q_1, Q_2 \ldots, Q_{k_1}, R_{k_2}, R_{k_2-1}, \ldots, R_2, R_1\}$ y el morfismo φ se descompondría de la forma

$$(\varphi, \sigma) = (\mu_1, \rho_1)^{-1} \circ \cdots \circ (\mu_{k_2}, \rho_{k_2})^{-1} \circ (\psi_{k_1}, \tau_{k_1}) \circ \cdots \circ (\psi_1, \tau_1).$$

Esta implicación nuevamente reduce a probar el teorema cuando el isomorfismo es entre un p-grupo y un p-grupo totalmente normalizado en $\mathfrak{X}(X)$.

Dado que P' es totalmente normalizado, por el teorema 3.32, dado (φ, σ) tal que $\varphi(P)$ es totalmente normalizado existen morfismos $(\widetilde{\varphi}, \sigma') \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{X}(X)}(N_S(P), S)$ y $(\chi, \tau) \in \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(X)}(P)$, tales que $\widetilde{\varphi}(P) = P'$, y $\widetilde{\varphi}|_P = \varphi \circ \chi$ y que $\sigma' = \sigma \circ \mu$.

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[d, "(\widetilde{\varphi}|_P, \sigma')"'] \arrow[dr, "(\chi,\mu)"] & \\
P' & P \arrow[l, "(\varphi,\sigma)"]
\end{tikzcd}$$

Esta última afirmación implica la igualdad $(\varphi, \sigma) = (\widetilde{\varphi}|_P \circ \chi^{-1}, \sigma' \circ \mu)$.
Al ser $P \lneqq S$, es posible obtener un p-subgrupo de S con un orden mayor a P donde éste sea normal, por lo que $P \lneqq N_S(P)$.

Como $(\widetilde{\varphi}, \sigma')$ es un morfismo entre $N_S(P)$ y $\widetilde{\varphi}(N_S(P))$, el teorema se cumple por hipótesis de inducción para $(\widetilde{\varphi}|_P, \sigma')$. Luego, se cumple para la restricción usando las mismas familias $\{Q_m\}_{m\in M}$ y morfismos $(\theta_m, \tau_m) \in (\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(X)}(Q_m)$ para los que se cumple el teorema por hipótesis de inducción sobre $(\widetilde{\varphi}, \sigma')$ por ser morfismo entre grupos de orden mayor a P, servirán también para su restricción en P.

Como $(\varphi, \sigma) = (\widetilde{\varphi}|_P \circ \chi^{-1}, \sigma' \circ \mu^{-1})$, y para $(\widetilde{\varphi}|_P, \sigma')$ se cumple el teorema, si consideramos el automorfismo $(\varphi\chi\varphi^{-1},\sigma\mu\sigma^{-1}) \in \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(X)}(P')$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[dr, "(\varphi\chi\varphi^{-1},\sigma\mu\sigma^{-1})"'] & P \arrow[l, "(\varphi,\sigma)"'] \arrow[d, "(\widetilde{\varphi}|_P,\sigma')"] \\ & P' \end{tikzcd}$$

y con esto podemos reconsiderar la demostración a que el teorema se cumple para (φ,σ) si y sólo si se cumple para $(\varphi\chi\varphi^{-1},\sigma\mu\sigma^{-1})$. Entonces podemos considerar que el teorema se cumple si y sólo si P es totalmente normalizado y $(\varphi,\sigma) \in \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(X)}(P)$.

Como P es totalmente normalizado, por el primer axioma de sistemas de acción de fusión saturados, también es totalmente centralizado.

Si P no es céntrico, por el quinto axioma de saturación, (φ,σ) se extiende a un morfismo $(\varphi^*,\sigma) \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{X}(X)}(N_{(\varphi,\sigma)},S)$. Como $(\varphi,\sigma) \in \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(X)}(P)$, retomando la definición de $N_{(\varphi,\sigma)}$,

$$N_{(\varphi,\sigma)} = \{g \in N_S(P) \mid (\varphi \circ c_g \circ \varphi^{-1}\ ,\ \sigma \circ \ell_g \circ \sigma^{-1})\ \in \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(\varphi(P))\},$$

puesto que $\varphi(P) = P$, podemos reescribir el conjunto como

$$N_{(\varphi,\sigma)} = \{g \in N_S(P) \mid (\varphi \circ c_g\varphi^{-1},\ \sigma \circ \ell_g \circ \sigma^{-1}) \in \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P)\},$$

y con esto es claro que todo elemento en $C_S(P) \cdot P$ va a cumplir la condición, por lo que podemos afirmar que $C_S(P) \cdot P \leq N_\varphi$.

Dado que la restricción de φ^* a P es φ, se tiene $\varphi^*(P) = P$ y por tanto $\varphi^*(C_S(P) \cdot P) = \varphi^*(C_S(P)) \cdot P$. Ya que todo elemento de $\varphi^*(C_S(P))$ conmuta con P, tenemos que $\varphi^*(C_S(P)) \leq C_S(P)$. Como φ^* es un homomorfismo inyectivo, $\varphi^*(C_S(P)) = C_S(P)$. Como estamos suponiendo que P no es céntrico, considerando el sistema de fusión subyacente $\mathcal{F}^{\mathfrak{X}(X)}$, el teorema 2.20 se cumplirá sobre $\mathcal{F}^{\mathfrak{X}(X)}$, pues todo elemento que sea conjugado con P será conjugado bajo un morfismo cuya primera coordenada sea un homomorfismo del sistema de fusión subyacente, por lo que es posible concluir que si P no es céntrico, $|P| < |C_S(P) \cdot P|$, pudiendo así extender el morfismo a uno en $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{X}(X)}(C_S(P) \cdot P, C_S(P) \cdot P)$, y por hipótesis de inducción dado que el orden de $C_S(P) \cdot P$ es mayor que el de P, se cumplirá el teorema para este caso.

Si P no es radical, implica que $|\mathrm{O_p}(\mathrm{Out}_{\mathfrak{X}(X)}(\mathrm{P}; \mathrm{X}))| > 1$, y por tanto existe al menos un p-subgrupo normal $H \trianglelefteq \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(X)}(P)$ de orden más grande que $\mathrm{Inn}_{\mathfrak{X}(X)}(P; X)$.

Por la suposición de no radicalidad, podemos considerar al subgrupo

$$K = O_p(\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(X)}(P)) \gneqq \mathrm{Inn}_{\mathfrak{X}(X)}(P; X).$$

Las contención de K expuesta se debe a que K es el subgrupo normal máximo, y por el corolario 3.40, $\mathrm{Inn}_{\mathfrak{X}(X)}(P; X)$ es normal. Ya que K un p-subgrupo normal en $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(X)}(P)$, podemos decir que existe un p-subgrupo de Sylow $\mathbb{K}$ que lo contiene.
Como P es totalmente normalizado, $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P) \in \mathrm{Syl}_p(\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(X)}(P))$ por el segundo axioma de saturación, por tanto es conjugado con $\mathbb{K}$, por lo que existe un $\beta \in \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(X)}(P)$ tal que $\beta\mathbb{K}\beta^{-1} = \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P)$, y en específico $\beta K \beta^{-1} \leq \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P)$, pero ya que K es normal en $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(X)}(P)$, $\beta K \beta^{-1} = K$. Por tanto tendremos que $K \trianglelefteq \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P)$.
Por hipótesis, para todo $(\alpha, \beta) \in K$, se tiene que $(\varphi\alpha\varphi^{-1}, \sigma\beta\sigma^{-1}) \in K$ por la normalidad de K. Esto es exactamente la condición del conjunto $N_{(\varphi,\sigma)}$ de la condición de extensión de los sistemas de fusión saturados,

$$N_{(\varphi,\sigma)} = \{g \in N_S(P) \mid (\varphi c_g \varphi^{-1}, \sigma \ell_g \sigma^{-1}) \in \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(\varphi(P))\},$$

Entonces la prueba se dirige a probar que $|P| < |N_{(\varphi,\sigma)}|$.

Por la primera afirmación de este caso, $K \gneqq \mathrm{Inn}_{\mathfrak{X}(X)}(P)$, por lo que $P \leq N_{(\varphi,\sigma)}$. Como $|\mathrm{Inn}_{\mathfrak{X}(X)}(P)| < |K| \leq |\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P)|$, entonces existen morfismos (c_g, ℓ_g) con $g \in S - P$ y que estén contenidos en $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P)$. En específico, existe $s \in N_S(P)$ tal que $s \notin P$ y que $(c_s, \ell_s) \in \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P) \cap K$ (pues todo K está contenido en $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P)$, y de no haber uno, K sería $\mathrm{Inn}_{\mathfrak{X}(X)}(P)$), por lo que $(\varphi c_s \varphi^{-1}, \sigma \ell_s \sigma^{-1}) \in \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,X)}(P)$. Consecuentemente $s \in N_{(\varphi,\sigma)}$, implicando que $|P| < |N_{(\varphi,\sigma)}|$, por lo que el morfismo (φ, σ) se puede extender a un morfismo en $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{X}(X)}(N_{(\varphi,\sigma)}, S)$, pudiendo así cumplir el teorema en este caso por la hipótesis de inducción.

Finalmente, si $\varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}^{\mathfrak{X}}(\mathrm{X})}(P)$ y P es totalmente normalizado, céntrico y radical, entonces el teorema se cumple considerando el diagrama conmutativo previo, y éste afirma que $(\varphi\chi\varphi^{-1})\varphi = \overline{\varphi}|_P$, y dado que el teorema se cumple para $\overline{\varphi}|_P$ y para $\varphi\chi\varphi^{-1}$, entonces se cumplirá para φ, dado que $\varphi = (\varphi\chi^{-1}\varphi)(\overline{\varphi}|_P^{-1})$.

$\square$

De esta forma, el teorema de Alperin también es aplicable a los sistemas de acción de fusión.

Capítulo 4

Sistemas de representación de fusión

El concepto de sistema de acción de fusión se adapta únicamente a un conjunto finito sobre el que un sistema de fusión actúa dadas ciertas reglas. Sin embargo, es posible darle una nueva dirección a un sistema de acción de fusión hacia un espacio vectorial. En el siguiente capítulo se intentará dar una versión de sistemas de acción de fusión sobre espacios vectoriales de dimensión finita sobre un campo de característica 0.

Un *sistema de representación de fusión* $\mathfrak{X}_S(V)$ basado en un p-grupo S actuando en un espacio vectorial V (de manera lineal), se espera definir como una categoría cuyos objetos sean los subgrupos $P \leq S$ y cuyos morfismos, denotados por $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{X}_S(V)}(P, Q)$, son parejas de funciones en $\mathrm{Inj}(P, Q) \times GL(V)$. Se espera que cumpla condiciones análogas a las de los sistemas de fusión y de acción de fusión:

- que para cualesquiera $P, Q \leq S$, para todo $s \in S$ se tenga que $(c_s, \rho(s)) \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{X}_S(V)}(P, Q)$, con $\rho(s) \in \rho(S)$ donde $\rho\colon S \longrightarrow GL(V)$ es el homomorfismo de grupos que determina la acción y
- que todo morfismo de $\mathfrak{X}_S(V)$ se descompone como un isomorfismo seguido de otro morfismo cuya primera coordenada es una inclusión.

Es claro que el concepto no dista del de sistema de acción de fusión, sin embargo éste aún se desea definir. Seguiremos la metodología de Gelvin en [10] para generar una estructura sólida sobre la que podamos desarrollar el concepto.

4.1 Preservando fusión en $GL(V)$

En el segundo capítulo se dio la definición de preservar fusión, idea que Gelvin redefinió en 2.37 apoyado de 2.36 para dar paso a los sistemas de acción de fusión. Sin embargo sus conceptos en ese momento sólo abarcaron el preservar fusión en grupos de orden finito. En el tercer capítulo se explicó cómo entendería Gelvin el preservar fusión en un grupo específico (S_n). Para nuestro propósito requerimos que el grupo sobre el que se preserve fusión sea $GL(V)$. Es por ello que simplemente consideraremos la definición 2.37 para darle sentido a qué sea preservar fusión con respecto a $GL(V)$. Para los conceptos posteriores, se hará aclaración de la notación a usar.

Definición 4.1. Se entenderá por V a un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo de característica 0. Dado un grupo G, se entenderá por una representación de G sobre V como un homomorfismo de G a $GL(V)$. Se definirá por ${}_HV$ al H-espacio vectorial V donde H actúa en V por restricción y se definirá por ${}^{\varphi}_{H}V$ al H-espacio vectorial V donde H actúa en V bajo la operación $h \cdot v := \varphi(h) \cdot v$. Se denotarán los puntos fijos de la acción de H en el H-espacio vectorial V como V^H y a la dimensión de este espacio por $\dim(V^H)$.

Definición 4.2. Dado un sistema de fusión $\mathcal{F}$ basado en S, un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo de característica distinta de cero V y un homomorfismo $\rho\colon S \longrightarrow GL(V)$, se dirá que ρ *preserva fusión* si y sólo si para cada $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P, P')$ existe algún $\psi \in \mathrm{Hom}_{GL(V)}(\rho(P), \rho(P'))$ tal que $\rho\varphi = \psi\rho$.

Dada la definición 4.2, ahora es posible definir la $\mathcal{F}$-estabilidad dada por Gelvin para sus resultados en [10] en este contexto.

Ambos teoremas de equivalencias de estabilidad precisarán que si un grupo actúa sobre un espacio vectorial, el conjunto de puntos fijos es un subespacio vectorial, pero esto es un resultado probado en el teorema 1.16.

Lema 4.3. Sea V un espacio vectorial y $\rho\colon S \longrightarrow GL(V)$ un homomorfismo. Si $H \leq S$, y $g \in S$, se tiene que $\dim(V^H) = \dim(V^{gHg^{-1}})$.

Prueba. Hay una correspondencia biyectiva lineal entre los elementos de V^H y los de $V^{gHg^{-1}}$ a través de la correspondencia $v \mapsto g \cdot v$. Si $h \cdot v = v$, entonces

$$(ghg^{-1}) \cdot (g \cdot v) = g \cdot (h \cdot (g^{-1} \cdot (g \cdot v)) = g \cdot (h \cdot v) = g \cdot (v) = g \cdot v$$

Y de la misma forma, a todo vector v en $V^{gHg^{-1}}$ le corresponde un vector $g^{-1} \cdot v$, dejando claro así que son subespacios vectoriales isomorfos y por tanto de la misma dimensión. $\square$

Debido a que la cantidad de puntos fijos por una acción es finita en un conjunto pero en un espacio vectorial no, el lema 3.2 diferirá en el caso de un espacio vectorial en el cuarto inciso para poder ser reutilizado con la misma consistencia dada a un sistema de acción de fusión para los sistemas de representación de fusión.

Sustituyendo la condición $|X^P| = |X^{gPg^{-1}}|$ por $\dim(V^P) = \dim(V^{gPg^{-1}})$, el concepto cobra mayor sentido. Sin embargo, no se encontró una manera de darle validez al cuarto inciso en el teorema 3.4, puesto que el teorema de Burnside sólo cobra sentido en el anillo de Burnside.

De igual forma, el teorema 3.4 es una forma equivalente a obtener la $\mathcal{F}$-estabilidad en un sistema de fusión de un conjunto y por tanto el concepto de $\mathcal{F}$-estabilidad sigue teniendo sentido independientemente de ello.

Lema 4.4. Sea V un G-espacio vectorial y consideremos $GL(V)$. Se define el homomorfismo $\rho\colon G \longrightarrow GL(V)$ asignando a cada $g \in G$ su representación en V; también se define $\rho_S = \rho|_S$. Las siguientes afirmaciones son ciertas:

- $\rho_S\colon S \longrightarrow GL(V)$ cumple que preserva fusión con respecto a $\mathcal{F}_G$.
- Para todo $g \in G$, $s \in S$ y $v \in V$, se tiene que $g \cdot (s \cdot v) = c_g(s) \cdot (g \cdot v)$
- Para todo $H \leq G$ y $g \in G$, se tiene que ${}_H V \cong {}^{c_g}_{H} V$ como H-conjuntos.
- Para todo $P \leq S$ y $g \in G$, se tiene que $\dim(V^P) = \dim(V^{gPg^{-1}})$

Prueba. La prueba es análoga a la dada en el lema 3.2. Para el primer inciso si consideramos $c_g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_G}(P, Q)$, podemos ver que si consideramos $F_{\rho_S}(c_g) = c_{\rho(g)}$ el diagrama

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\rho_S} & \rho_S(P) \\ {\scriptstyle c_g}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle F_{\rho_S}(c_g)} \\ Q & \xrightarrow{\rho_S} & \rho_S(Q) \end{array}$$

cumple que $c_{\rho_S(g)} \circ \rho_S = \rho_S \circ c_g$, por lo que cumplirá que preserva fusión. Para el segundo inciso, tenemos que claramente $g \cdot (s \cdot v) = (g \cdot s \cdot g^{-1}) \cdot (g \cdot v) = c_g(s) \cdot (g \cdot v)$. Para que ${}_H V$ fuera isomorfo como G-espacio vectorial a ${}^{c_g}_{H} V$, se desearía que existiera una función entre H-espacios vectoriales $f\colon {}_H V \longrightarrow {}^{c_g}_{H} V$ tal que tuviera una función inversa y que cumpliera que para todo $h \in H$ fuera cierto que $f(h \cdot v) = h \cdot f(v)$, y de forma análoga $f^{-1}(h \cdot v) = h \cdot f^{-1}(v)$. Esto es a causa de que si consideramos el isomorfismo $\rho(g)\colon V \longrightarrow V$, tendremos que si $h \in H$, al aplicar el isomorfismo, se obtendrá que $\rho(g)(h \cdot v) = g \cdot h \cdot g^{-1}(g \cdot v) = g(\cdot h \cdot v)$, que es justo lo que necesitamos. Para el cuarto inciso, la demostración está en el lema 4.3. $\square$

Para su uso posterior, podemos definir la misma estabilidad dada por Gelvin:

Definición 4.5. Dado un sistema de fusión saturado $\mathcal{F}$ sobre un p-grupo S y un S-espacio vectorial V, se dirá que V es $\mathcal{F}$-*estable* si el homomorfismo $\rho\colon S \longrightarrow GL(V)$ que determina la acción de S preserva fusión.

Teorema 4.6. *Sea S un p-grupo y $\mathcal{F}$ un sistema de fusión saturado basado en S. Sea $\rho_S\colon S \longrightarrow GL(V)$ el homomorfismo que define la acción de S. Para cualquier S-espacio vectorial V los siguientes enunciados son equivalentes:*

- *V es $\mathcal{F}$-estable.*
- *Para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P, Q)$, existe un $\tau \in GL(V)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\rho_S"] \arrow[d, "\varphi"'] & \rho_S(P) \arrow[d, "c_\tau"] \\ P' \arrow[r, "\rho_S"] & \rho_S(P') \end{tikzcd}$$

- *Para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P, Q)$, existe un isomorfismo abstracto de P-conjuntos ${}_PV \cong {}^{\varphi}_{P}V$.*

Prueba. Nuevamente la prueba es similar a la dada en 3.4. La equivalencia entre el primer punto con el segundo es debido a la definición de preservar fusión y del uso de la definición 4.2.

Para ver la equivalencia entre el segundo y el tercer punto, veamos que el tercer punto puede reescribirse como decir que existe una función $f\colon {}_PV \xrightarrow{\cong} {}^{\varphi}_{P}V$ tal que $f(g \cdot v) = \varphi(g)f(v)$. Para la prueba del segundo punto al tercero, si consideramos $f = \tau$ donde τ es la acción que hace conmutar el diagrama del segundo punto, tendremos que para $g \in P$ y $v \in V$, ocurrirá que

$$\tau(\rho_S(g) \cdot v) = \rho_S(\varphi(g)) \cdot \tau(v),$$

por lo que se cumplirá que τ sea la función requerida. Para la vuelta del tercer punto al segundo, podemos ver que la misma función f que cumple la condición para el tercer punto cumplirá que el diagrama conmute, puesto que $f\colon {}_PV \xrightarrow{\cong} {}^{\varphi}_{P}V$, para todo $p \in P$ y $v \in V$, se tendrá que $f(\rho_S(p) \cdot v) = \rho_S(\varphi(p)) \cdot f(v)$, y dado que f es una función biyectiva entre V y él mismo, $f \in GL(V)$, por lo que $\tau = f$ cumple las dos condiciones del segundo inciso. $\square$

4.2 Sistemas de representación de fusión

La idea de un *sistema de representación de fusión* termina siendo una extensión de los sistemas de acción de fusión. La mayoría de los resultados dados por Gelvin en [10] tienen pruebas análogas difiriendo únicamente en el objeto sobre el que se realicen las acciones. Si G es un grupo, se denotará por ρ_g a la imagen de $g \in G$ en la representación de $GL(V)$

Definición 4.7. Dado un espacio vectorial V y un p-grupo S, se define la categoría de Gelvin lineal $\mathfrak{A}(S,V)$ como la categoría donde los objetos sean $\{P \mid P \leq S\}$ y los morfismos sean

$$\mathrm{Mor}_{\mathfrak{A}(S,V)}(P,Q) = \{(\varphi,\rho) \in \mathrm{Inj}(P,Q) \times GL(V) \mid \rho \text{ es } \varphi\text{-equivariante}\},$$

los cuales se componen coordenada a coordenada.

De aquí, es posible obtener la definición esperada de un sistema de representación de fusión:

Definición 4.8. Sea S un p-grupo y V un espacio vectorial. Un *sistema de representación de fusión basado en* S actuando en un espacio vectorial V es una subcategoría $\mathfrak{X}_S(V)$ de $\mathfrak{A}(S,V)$ cuyos objetos son los mismos que $\mathfrak{A}(S,V)$ y cuyos morfismos, denotados por $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{X}_S(V)}(P,Q)$ satisfacen las siguientes condiciones:

- Para cualesquiera $P,Q \leq S$ y para todo $s \in S$ tal que $sPs^{-1} \subseteq Q$ se tiene que $(c_s,\rho_s) \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{X}_S(V)}(P,Q)$, donde $\rho_s \colon V \longrightarrow V$ está dado por $\rho_s(x) = s \cdot x$.
- Todo morfismo de $\mathfrak{X}_S(V)$ se descompone como un isomorfismo seguido de otro morfismo cuya primera coordenada es una inclusión.

Claramente un sistema de representación de fusión cumple los formalismos aplicados para un sistema de acción de fusión, por lo que para los efectos, muchos de los resultados de los últimos se podrán aplicar a los sistemas de representación de fusión.

Una cuestión importante es que un sistema de representación de fusión puede definirse sobre un p-grupo S, aunque se pueden no obtener los morfismos en base a un grupo G, de la misma manera que ocurre para sistemas (de acción) de fusión.

Definición 4.9. Dado un grupo finito G, un espacio vectorial V y un p-subgrupo de Sylow S de G, se define el *sistema de representación de fusión basado en S relativo a G en V* a la categoría $\mathfrak{X}_S(G,V)$, cuyos objetos son los subgrupos $P \leq S$ y sus morfismos son dados por

$$\mathrm{Mor}_{\mathfrak{X}_S(G,V)}(P,Q) = \{(\varphi,\sigma) \mid \varphi = c_g \colon P \longrightarrow Q \ \text{ y } \ \sigma = \rho_g : V \xrightarrow{\cong} V \text{ para cierto } \ g \in G\}.$$

La composición está dada coordenada a coordenada.

Como es de esperarse que todo el álgebra contenido en los sistemas de acción de fusión se pueda heredar a los sistemas de representación de fusión, una cuestión importante para los ejemplos es que el teorema de Alperin se aplicará también. Por tanto, los únicos morfismos de los que prestaremos atención son los automorfismos de los objetos de cada $\mathfrak{X}_S(V)$ presentado, pues las composiciones se podrán obtener por el teorema de Alperin.

Ejemplo 4.10. Para obtener un ejemplo sencillo de un sistema de representación de fusión, consideremos es un sistema de acción de fusión actuando sobre la base B de un espacio vectorial V. toda permutación de G induce un isomorfismo lineal de V, es decir, hay un homomorfismo $: S_B \longrightarrow GL(V)$. Aplicando el homomorfismo correspondiente $\rho \colon S_{V_b} \longrightarrow GL(V)$ (donde V_b denota a la base de V) a la segunda coordenada de los morfismos del sistema de acción de fusión nos dará un sistema de representación de fusión. Como se definió previamente que éste tenga una dimensión finita, su base también lo será. Los objetos serán los mismos que el sistema de acción de fusión y los morfismos en vez de ser de la forma (φ,σ), serán $(\varphi,\rho(\sigma))$. Éste es un caso de un sistema de representación de fusión isomorfo a un sistema de acción de fusión como categoría.

Ejemplo 4.11. Un ejemplo concreto de lo que mencioado en el ejemplo 4.10 es el caso considerando $\mathbb{Z}_2$ y el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Consideramos la representación de $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ al grupo de transformaciones $\rho\colon \mathbb{Z}_2 \longrightarrow GL_2(\mathbb{R})$ dada por

$$\rho(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad \rho(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si consideramos el sistema de representación de fusión sobre $\mathbb{Z}_2$ denotado por $\mathfrak{X}_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{R}^2)$, los objetos únicamente serán $\mathrm{Ob}(\mathfrak{X}_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{R}^2)) = \{\{0\}, \mathbb{Z}_2\}$. De los morfismos sólo requerimos los que son de un grupo sobre sí mismo (automorfismos) como en los sistemas expuestos anteriormente. En la primera coordenada, los morfismos serán simplemente la identidad, puesto que no puede ocurrir otro morfismo en $\mathbb{Z}_2$. Por otra parte, la segunda coordenada del morfismo (el morfismo en $GL(V)$ puede ser $\rho(0_2)$ o $\rho(1_2)$, dejando así para cada grupo dos posibles morfismos: $(\mathrm{Id}, \rho(0_2))$ o $(\mathrm{Id}, \rho(1_2))$. Entonces el sistema de representación de fusión obtenido es representado por el diagrama:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "\mathbb{Z}_2"] \arrow[r] & S \arrow[loop right, "\mathbb{Z}_2"] \end{tikzcd}$$

Utilizando la base canónica de $\mathbb{R}^2$, es claro que estamos definiendo bajo esta representación una permutación de la base $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, por lo que es isomorfo a un sistema de acción de fusión.

Ejemplo 4.12. Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, el grupo

$$D_8 = \langle r, s | r^4 = s^2 = e,\ rs = sr^{-1} \rangle$$

y la representación $\rho\colon D_8 \longrightarrow GL_2(\mathbb{R})$ dada por:

$$(\rho_s :=)\rho(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (\rho_r :=)\rho(r) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (\rho_e :=)\rho(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hay que notar que ρ es inyectiva. El sistema de representación de fusión $\mathfrak{X}(D_8, \mathbb{R}^2)$ se compone de los subgrupos de D_8. Fácilmente uno puede realizar el diagrama como en ejemplos anteriores. Primeramente los automorfismos de los subgrupos de orden 2 son únicamente la identidad en la primera coordenada, aunque por la segunda coordenada, serán la imagen de cada elemento de D_8 bajo ρ. Por tanto, para los grupos de orden 2, los grupos de automorfismos serán de la forma $\{1\} \times \rho(D_8)$.

Para los subgrupos de orden 4, los automorfismos de la primera coordenada son isomorfos a $\mathbb{Z}_2$, dado que todos los subgrupos son normales en el grupo inmediato superior del diagrama y no conmutan con él (salvo $\langle r^2 \rangle$, el cual es el centro del grupo y por tanto su normalizador es su centralizador), los morfismos de cada subgrupo de orden 4 son la identidad o la función que manda a cada elemento a su inverso (la conjugación por r). Por tanto, para los subgrupos de orden 4 distintos del centro de D_8, sus automorfismos serán

$$\{1\} \times \{\rho_{s^\alpha} \mid 0 \leq \alpha < 4\} \cup \{c_r\} \times \{\rho_{rs^\alpha} \mid 0 \leq \alpha < 4\}$$

Y en el caso del centro, los automorfismos serán $\{1\} \times \{\rho_d \mid d \in D_8\}$.

$$\begin{tikzcd}
 & & \langle r, s \rangle & & \\
 & \langle r^2, s \rangle \arrow[ur] & \langle r \rangle \arrow[u] & \langle r^2, rs \rangle \arrow[ul] & \\
\langle r^2 s \rangle \arrow[ur] \arrow[r, leftrightarrow] & \langle s \rangle \arrow[u] & \langle r^2 \rangle \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & \langle rs \rangle \arrow[u] \arrow[r, leftrightarrow] & \langle r^3, s \rangle \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Una de las cuestiones importantes en el concepto de sistema de representación de fusión es que ahora es requerimento mencionar la estructura sobre la que uno está trabajando, dado que hay cabida a la confusión entre un sistema de acción de fusión y un sistema de representación de fusión. Por tanto, una de las cuestiones importantes será la notación.

Si al tener un sistema de representación de fusión existe la posibilidad de confundir al lector con un sistema de acción de fusión, se denotará por $\mathfrak{X}(S, V, \mathbf{Vect}_K)$ a los sistemas de representación de fusión, donde $\mathbf{Vect}_K$ es la categoría de espacios vectoriales en el campo K. Si al tener un sistema de acción de fusión existe la posibilidad de confundir al lector, se denotará por $\mathfrak{X}(S, V, \mathbf{Set})$ a los sistemas de acción de fusión, donde $\mathbf{Set}$ será la categoría de espacios vectoriales en el campo K.

Es fácil ver que muchos de los objetos obtenidos para sistemas de acción de fusión pueden ser adaptados a sistemas de representación de fusión.

Definición 4.13. Se define el sistema de fusión subyacente de un sistema de representación de fusión $\mathfrak{X}_S(V)$ basado sobre el p-grupo S como el sistema de fusión $\mathcal{F}^{\mathfrak{X}_S(V)}$ donde $\mathrm{Ob}(\mathcal{F}^{\mathfrak{X}_S(V)}) = \mathrm{Ob}(\mathfrak{X}_S(V))$ y los morfismos de $\mathcal{F}^{\mathfrak{X}_S(V)}$ son

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{F}^{\mathfrak{X}_S(V)}}(P,Q) = \{\varphi\colon P \longrightarrow Q \mid \text{existe } \rho \in GL_(V) \text{ tal que } (\varphi,\rho) \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{X}_S(V)}(P,Q)\}$$

Definición 4.14. Se define el funtor $\rho_{\mathcal{F}}\colon \mathfrak{X}_S(V, \mathbf{Vect}_K) \longrightarrow \mathcal{F}^{\mathfrak{X}_S(V)}$ como

$$\rho_{\mathcal{F}}\colon Ob(\mathfrak{X}_S(V, \mathbf{Vect}_K)) \longrightarrow Ob(\mathcal{F}^{\mathfrak{X}_S(V,\mathbf{Vect}_K)})$$
$$P \mapsto P$$
$$\rho_{\mathcal{F}}\colon \mathrm{Mor}_{\mathfrak{X}_S(V,\mathbf{Vect}_K)}(P,Q) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{X}_S(V,\mathbf{Vect}_K)}(P,Q)$$
$$(\varphi,\rho) \mapsto \varphi$$

Definición 4.15. Sea K el kernel de la acción de la representación de G sobre V. Definimos el V-*normalizador* y V-*centralizador* en G de un subgrupo $H \leq G$ como

$$N_G(H;V) = N_G(H) \cap K \qquad\qquad C_G(H;V) = C_G(H) \cap K.$$

De los conceptos dados, se pueden definir los equivalentes a los subgrupos totalmente normalizados y totalmente centralizados de un sistema de acción de fusión:

Definición 4.16. Dado un sistema de representación de fusión $\mathfrak{X}_S(V)$, y un subgrupo $P \leq S$. Se definen los siguientes conceptos:

- P es *totalmente normalizado en* $\mathfrak{X}_S(V)$ si $|N_S(P)| \geq |N_S(P')|$ para todo $P' \cong_{\mathfrak{X}_S(V)} P$.
- P es *totalmente centralizado en* $\mathfrak{X}_S(V)$ si $|C_S(P)| \geq |C_S(P')|$ para todo $P' \cong_{\mathfrak{X}_S(V)} P$.
- P es *totalmente V-normalizado en* $\mathfrak{X}_S(V)$ si $|N_S(P;V)| \geq |N_S(P';V)|$ para todo $P' \cong_{\mathfrak{X}_S(V)} P$.

- P es *totalmente V-centralizado en* $\mathfrak{X}_S(V)$ si $|C_S(P;V)| \geq |C_S(P';V)|$ para todo $P' \cong_{\mathfrak{X}_S(V)} P$.

Una pieza importante en el estudio de los sistemas de fusión y los sistemas de acción de fusión han sido los axiomas de saturación. Dado que la totalidad del álgebra de los sistemas de acción de fusión puede recuperarse al sustituir conjuntos finitos por espacios vectoriales de dimensión finita, es posible dar una definición similar de *saturación* para los sistemas de representación de fusión. Por tanto, podemos heredar los mismos subgrupos importantes que Gelvin consideró.

Definición 4.17. Dado un grupo G, y $P \leq S \leq G$, se definen los siguientes conjuntos como los (G,V)-*automizadores* de P como

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}_S(G,V)}(P) & = & \{(\varphi,\rho) \mid \text{son morfismos de } \mathfrak{X}_S(G,V)\} \\
\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}^{\mathfrak{X}_S(G,V)}}(P) & = & \{\varphi \in \mathrm{Aut}(P) \mid \text{existe } \rho \in GL(V) \text{ tal que } (\varphi,\rho) \in \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}_S(G,V)}(P)\} \\
GL^{\mathfrak{X}_S(G,V)}(P) & = & \{\rho \in GL(V) \mid \text{existe } \varphi \in \mathrm{Aut}(P) \text{ tal que } (\varphi,\rho) \in \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}_S(G,V)}(P)\} \\
\mathcal{F}_0^{\mathfrak{X}_S(G,V)}(P) & = & \{\varphi \in \mathrm{Aut}(P) \mid (\varphi, \mathrm{id}_V) \in \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}_S(G,V)}(P)\} \\
GL_0^{\mathfrak{X}_S(G,V)}(P) & = & \{\rho \in GL(V) \mid (\mathrm{id}_P, \rho) \in \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}_S(G,V)}(P)\}.
\end{array}$$

Nuevamente los cocientes definidos en el capítulo anterior son válidos para este caso. Para el caso de un sistema de representación de fusión que no necesariamente dependa de un grupo G, se definen los V-automizadores por medio de los siguientes conceptos:

Definición 4.18. Dado un p-grupo S y $P \leq S$ y un espacio vectorial V, se definen los siguientes grupos como los *V-automizadores* de P como

- $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}_S(V)}(P)$, al grupo de automorfismos de P en $\mathfrak{X}_S(V)$.
- $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}^{\mathfrak{X}_S(V)}}(P)$ al grupo de automorfismos de P en $\mathcal{F}^{\mathfrak{X}_S(V)}$.
- $\mathcal{F}_0^{\mathfrak{X}_S(V)}(P)$ al grupo de morfismos en $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}_S(V)}(P)$ de la forma $(\varphi, \mathrm{id}_{GL(V)})$ tales que los automorfismos φ que sean $\mathrm{id}_{GL(V)}$-equivariantes.

- $GL^{\mathfrak{X}_S(V)}(P)$ al conjunto de representaciones sobre $GL(V)$ que aparecen en la segunda coordenada de los morfismos en $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}_S(V)}(P)$.
- $GL_0^{\mathfrak{X}_S(V)}(P)$ al conjunto de morfismos en $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}_S(V)}(P)$ de la forma (id_P, ρ) donde las representaciones ρ sean id_P-equivariantes.

Dado que los grupos descritos antes son en esencia los mismos que los descritos en las definiciones 3.15, 3.16 y 3.17, es posible dar los mismos axiomas de saturación para los sistemas de representación de fusión:

Definición 4.19. Sea S un p-grupo y $\mathfrak{X}_S(V)$ un sistema de representación de fusión basado en S. Se dice que $\mathfrak{X}_S(V)$ es *saturado* si

I) Dado $P \leq S$, se cumplen las siguientes implicaciones:

$$\begin{tikzcd} P \text{ es totalmente normalizado} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & P \text{ es totalmente } V\text{-normalizado} \arrow[d, Rightarrow] \\ P \text{ es totalmente centralizado} \arrow[r, Rightarrow] & P \text{ es totalmente } V\text{-centralizado.} \end{tikzcd}$$

II) Si P es totalmente normalizado, entonces

- $\mathrm{Aut}_S(P) \in \mathrm{Syl}_p(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}^{\mathfrak{X}(S,V)}}(P))$.
- $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,V)}(P) \in \mathrm{Syl}_p(\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}_S(V)}(P))$.
- $GL^{\mathfrak{X}(S,V)}(P) \in \mathrm{Syl}_p(GL^{\mathfrak{X}_S(V)}(P))$.

III) Si P es totalmente V-normalizado, entonces $\mathcal{F}_0^{\mathfrak{X}(S,V)}(P) \in \mathrm{Syl}_p(\mathcal{F}_0^{\mathfrak{X}_S(V)}(P))$.

IV) Si P es totalmente centralizado, entonces $GL_0^{\mathfrak{X}(S,V)}(P) \in \mathrm{Syl}_p(GL_0^{\mathfrak{X}_S(V)}(P))$.

V) Si $P \leq S$ y $(\varphi, \rho) \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{X}_S(V)}(P, P')$ tal que $\varphi(P)$ es totalmente V-centralizado y definimos

$$N_{(\varphi,\rho)} := \{g \in N_S(P) \mid (\varphi \circ c_g \circ \varphi^{-1}, \tau \circ \rho_g \circ \tau^{-1}) \in \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,V)}(\varphi(P))\},$$

entonces existe un $(\widetilde{\varphi}, \sigma) \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{X}_S(V)}(N_{(\varphi,\sigma)}, S)$ tal que $\varphi = \widetilde{\varphi}|_P$.

A estas condiciones se les llamarán *axiomas de saturación de sistemas de representación de fusión.*

Una cuestión importante aquí, es que la prueba para demostrar que todo sistema de acción de fusión de la forma $\mathfrak{X}_S(G,X)$ es saturado, también puede extenderse a un sistema de representación de fusión:

Teorema 4.20. *Dado un sistema de representación de fusión $\mathfrak{X}_S(G,V)$ sobre un p-Sylow S relativo al grupo G actuando sobre un espacio vectorial V, se cumple que si P es totalmente normalizado, entonces*

- $\mathrm{Aut}_S(P) \in \mathrm{Syl}_p(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}^{\mathfrak{X}_S(G,V)}(G)}(P))$.
- $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,V)}(P) \in \mathrm{Syl}_p(\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}_S(G,V)}(P))$.
- $GL^{\mathfrak{X}(S,V)}(P) \in \mathrm{Syl}_p(GL^{\mathfrak{X}_S(G,V)}(P))$.

Más aún, si P es totalmente normalizado, entonces es totalmente centralizado, totalmente V-normalizado y totalmente V-centralizado.

Prueba. La prueba es análoga al teorema 3.23. □

Teorema 4.21. *Dado un sistema de representación de fusión $\mathfrak{X}_S(G,V)$ sobre un p-Sylow S relativo al grupo G actuando sobre un espacio vectorial V, se cumple que si P es totalmente V-normalizado, entonces $\mathcal{F}_0^{\mathfrak{X}(S,V)}(P) \in \mathrm{Syl}_p(\mathcal{F}_0^{\mathfrak{X}_S(V)}(P))$ y P es totalmente V-centralizado.*

Prueba. La prueba es análoga a la dada para el teorema 3.24. □

Teorema 4.22. *Dado un sistema de representación de fusión $\mathfrak{X}_S(G,V)$ sobre un p-Sylow S relativo al grupo G actuando sobre un espacio vectorial V, se cumple que si P es totalmente centralizado, entonces $GL_0^{\mathfrak{X}(S,V)}(P) \in \mathrm{Syl}_p(GL_0^{\mathfrak{X}_S(G,V)}(P))$ y P es totalmente V-centralizado.*

Prueba. La prueba es análoga a la dada en el teorema 3.25. □

Los teoremas 4.20,4.21 y 4.22 demuestran que para cualquier sistema de representación de fusión de la forma $\mathfrak{X}_S(G,V)$, siempre se cumplirán el segundo, tercer y cuarto axioma de saturación respectivamente. Además, considerándolos en conjunto, demuestran el primer axioma de saturación debido a las implicaciones en sus pruebas.

Finalmente, el quinto axioma para sistemas de representación de fusión saturados también es adaptable a un sistema de representación de fusión de la forma $\mathfrak{X}_S(G,V)$.

Teorema 4.23. *Dado un sistema de representación de fusión $\mathfrak{X}_S(G,V)$ sobre un p-Sylow S relativo al grupo G actuando sobre un espacio vectorial V, se cumple que si consideramos un $g \in G$ tal que gPg^{-1} es totalmente V-centralizado en $\mathfrak{X}_S(G,V)$, entonces existe un $g' \in G$ tal que $g'N_{(c_g,\rho_g)} \leq S$ y que $(c_{g'},\rho_{g'})|_P = (c_g,\rho_g)$. Dicho de otra forma, existe un morfismo $(c_{g'},\rho_{g'}) \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{X}_S(G,X)}(N_{(c_g,\rho_g)},S)$ tal que extienda a (c_g,ρ_g).*

Prueba. La prueba es análoga a la dada en el teorema 3.26. $\square$

Teorema 4.24. *Si un sistema de representación de fusión $\mathfrak{X}_S(V)$ es saturado, el sistema de fusión subyacente $\mathcal{F}^{\mathfrak{X}_S(V)}$ es saturado también.*

Prueba. Análoga a la prueba del teorema 3.26. $\square$

Teorema 4.25. *Sea S un p-grupo. Fijemos un sistema de representación de fusión saturado $\mathfrak{X}_S(V)$ basado en S sobre un espacio vectorial V y sea P un subgrupo de S. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- *P es totalmente normalizado en $\mathcal{F}^{\mathfrak{X}_S(V)}$.*
- *P es totalmente centralizado en $\mathcal{F}^{\mathfrak{X}_S(V)}$ y $\mathrm{Aut}_S(P) \in \mathrm{Syl}_p(\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}_S(V)}(P))$.*
- *P es totalmente V-normalizado en $\mathcal{F}^{\mathfrak{X}_S(V)}$ y $GL^{\mathfrak{X}(S,V)}(P) \in \mathrm{Syl}_p(GL^{\mathfrak{X}_S(V)}(P))$.*
- *P es totalmente V-centralizado en $\mathcal{F}^{\mathfrak{X}_S(V)}$ y $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}(S,V)}(P) \in \mathrm{Syl}_p(\mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}_S(V)}(P))$*

Prueba. Análoga a la prueba del teorema 3.29. $\square$

Teorema 4.26. *Si* $(\varphi, \sigma) \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{X}_S(V)}(P, P')$ *es un isomorfismo tal que* P' *es totalmente normalizado, entonces hay un morfismo* $(\widetilde{\varphi}, \sigma') \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{X}_S(V)}(N_S(P), S)$ *y* $(\psi, \tau) \in \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}_S(V)}(P)$ *tal que* $\widetilde{\varphi}|_P = \varphi \circ \psi$ *y que* $\sigma' = \sigma \circ \tau$.

Prueba. Análoga al teorema 3.32. □

Para enunciar el teorema de Alperin para sistemas de representación de fusión saturados, se requieren de los conceptos de céntrico y radical.

Definición 4.27. Se dice que $P \leq S$ es *céntrico en el sistema de representación de fusión* si $C_S(P) \leq P$, y para todo $P' \cong_{\mathfrak{X}_S(V)} P$ se cumple que $C_S(P') \leq P'$.

Definición 4.28. Se dice que $P \leq S$ es V*-céntrico en el sistema de representación de fusión* si $C_S(P; V) \leq P$, y para todo $P' \cong_{\mathfrak{X}_S(V)} P$ se cumple que $C_S(P'; V) \leq P'$.

Definición 4.29. Dado un sistema de representación de fusión $\mathfrak{X}_S(V)$ sobre un p-grupo S y un subgrupo $P \leq S$, se define el *grupo de automorfismos internos de* P *en el sistema de representación de fusión* $\mathfrak{X}_S(V)$ como el grupo

$$\mathrm{Inn}_{\mathfrak{X}_S(V)}(P) := \{(\varphi, \sigma) \in \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}_S(V)}(P) \mid \varphi \in \mathrm{Inn}(P)\}$$

donde $\mathrm{Inn}(P)$ es el grupo de automorfismos internos de P.

Definición 4.30. Dado un sistema de representación de fusión sobre un p-grupo S y un subgrupo $P \leq S$, se define el *grupo de automorfismos externos de* P *en el sistema de representación de fusión* $\mathfrak{X}_S(V)$ como

$$\mathrm{Out}_{\mathfrak{X}_S(V)}(P) := \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}_S(V)}(P)/\mathrm{Inn}_{\mathfrak{X}_S(V)}(P)$$

Definición 4.31. Dado un p-grupo S, un subgrupo $P \leq S$ es llamado radical en $\mathfrak{X}_S(V)$ si $\mathrm{Out}_{\mathfrak{X}_S(V)}(P)$ es p-reducido.

Teorema 4.32. ***(Alperin)*** *Dado un sistema de representación de fusión saturado* $\mathfrak{X}_S(V)$ *basado en un* p*-grupo* S *sobre un espacio vectorial* V*, entonces para cada* $(\varphi, \rho) \in \mathrm{Iso}_{\mathfrak{X}_{S(V)}}(P, P')$ *existe una secuencia de subgrupos de* S*.*

$$P = P_0, P_1, \ldots, P_k = P' \qquad\qquad Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$$

Y elementos $(\varphi_i, \rho_i) \in \mathrm{Aut}_{\mathfrak{X}_{S(V)}}(Q_i)$*, tales que:*

- Q_i *es totalmente normalizado en* $\mathfrak{X}_S(V)$*, radical y céntrico para cada* $i = 1, \ldots, k$*;*
- $P_{i-1}, P_i \leq Q_i$ *y* $\varphi_i(P_{i-1}) = P_i$ *para cada* i*, y*
- $(\varphi, \rho) = (\varphi_k, \rho_k) \circ (\varphi_{k-1}, \rho_{k-1}) \circ \cdots \circ (\varphi_1, \rho_1)$*.*

Prueba*.* La prueba es análoga al teorema de Alperin para sistemas de acción de fusión saturados. □

Glosario

Referencias

[1] J. Adámek, H. Herrlich and G. E. Strecker, *Abstract and concrete categories*, Pure and Applied Mathematics (New York), Wiley, New York, 1990.

[2] M. Aschbacher, R. Kessar and B. Oliver, *Fusion Systems in Algebra and Topology*, London Mathematical SocietyLondon Mathematical Society Lecture Notes, Vol. 391, Cambridge University Press, Cambridge, vi+320 pp., 2011.

[3] S. Bouc, Burnside rings, in *Handbook of algebra, Vol. 2*, 739–804, North-Holland, Amsterdam.

[4] C. Broto, R. Levi and B. Oliver, The homotopy theory of fusion systems, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), no. 4, 779–856.

[5] K. S. Brown, *Cohomology of groups*, Graduate Texts in Mathematics, 87, Springer, New York, 1982.

[6] H. Cartan and S. Eilenberg, *Homological algebra*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1956.

[7] A. Chermak, Fusion systems and localities, Acta Math. **211** (2013), no. 1, 47–139.

[8] D. S. Dummit and R. M. Foote, *Abstract algebra*, third edition, Wiley, Hoboken, NJ, 2004.

[9] J. B. Fraleigh, *A first course in abstract algebra*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, MA, 1967.

[10] M. J. K. Gelvin, *Fusion action systems*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2010.

[11] G. Glauberman, and J. Lynd, Control of fixed points for p-toral groups, and existence and uniqueness of linking systems, arXiv:1506.01307, 2015.

[12] D. M. Goldschmidt, A conjugation family for finite groups, J. Algebra **16** (1970), 138–142.

[13] E. Guerrero, E. Pérez. Algebra Abstracta, de grupos a preliminares de la Teoría de Galois. Ediciones de la Universidad Autónoma de Yucatán, 2010.

[14] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002.

[15] E. Henke, *Recognizing $SL_2(q)$ in fusion systems*, J. Group Theory 13 (2010) 679–702

[16] D. Husemöller et al., *Basic bundle theory and K-cohomology invariants*, Lecture Notes in Physics, 726, Springer, Berlin, 2008.

[17] N. Jacobson, *Basic algebra. II*, Freeman, San Francisco, CA, 1980.

[18] H. B. Lawson, Jr. and M.-L. Michelsohn, *Spin geometry*, Princeton Mathematical Series, 38, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1989.

[19] R. Levi and B. Oliver, Construction of 2-local finite groups of a type studied by Solomon and Benson, Geom. Topol. **6** (2002), 917–990.

[20] J. Milnor, Construction of universal bundles. I, Ann. of Math. (2) **63** (1956), 272–284.

[21] J. Milnor, Construction of universal bundles. II, Ann. of Math. (2) **63** (1956), 430–436.

[22] G. Mislin, On group homomorphisms inducing mod-p cohomology isomorphisms, Comment. Math. Helv. **65** (1990), no. 3, 454–461.

[23] S. H. Murray, Conjugacy classes in maximal parabolic subgroups of general linear groups, J. Algebra **233** (2000), no. 1, 135–155.

[24] L. Puig, Frobenius categories, J. Algebra **303** (2006), no. 1, 309–357.

[25] L. Puig, *Frobenius categories versus Brauer blocks*, Progress in Mathematics, 274, Birkhäuser, Basel, 2009.

[26] L. Puig, Structure locale dans les groupes finis, Bull. Soc. Math. France Suppl. Mém. No. 47 (1976), 132 pp.

[27] D. Quillen, The spectrum of an equivariant cohomology ring. I, II, Ann. of Math. (2) **94** (1971), 549–572; ibid. (2) **94** (1971), 573–602.

[28] A. Ruiz, Exotic normal fusion subsystems of general linear groups, J. Lond. Math. Soc. (2) **76** (2007), no. 1, 181–196