TAREA 1 A ENTREGARSE EL 28 DE AGOSTO

1. (10 puntos) Un grupoide es una categoría donde todos los morfismos son invertibles. Se dice que una categoría es conexa si cualesquiera dos objetos están conectados por un zigzag de morfismos. Demuestra que cualquier grupoide conexo es equivalente a $\mathcal{B}G$ para algún grupo discreto G.

2. (10 puntos) Sea $F\colon I \times J \to \mathcal{C}$ un funtor covariante, donde I y J son categorías pequeñas y $\mathcal{C}$ es una categoría cocompleta. Define funtores adjuntos $F_1\colon I \to \mathcal{C}^J$ y $F_2\colon J \to \mathcal{C}^I$ y demuestra que

$$\varinjlim_I \varinjlim_J F_2 \cong \varinjlim_J \varinjlim_I F_1 \cong \varinjlim_{I\times J} F$$

3. (10 puntos) Demuestra que una categoría es completa si y solo si existen todos los productos y pullbacks.

4. (10 puntos) Sea G un grupo discreto y sea $F\colon \mathcal{B}G \to \mathrm{Top}$ un funtor covariante. Demuestra que

$$\varinjlim_{\mathcal{B}G} F \cong X/G$$
$$\varprojlim_{\mathcal{B}G} F \cong X^G$$

donde $X = F(\bullet)$, para cierta acción de G sobre X.

5. (10 puntos) Demuestra el Lema de Yoneda: Sea $G\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Set}$ un funtor contravariante y sea c un objeto de $\mathcal{C}$. Entonces hay una biyección

$$\mathrm{Mor}_{\mathrm{Set}^{\mathcal{C}}}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(-, c), G) \cong G(c)$$

que es natural en c y G.

6. (10 puntos) Sea $F\colon J \to \mathcal{C}$ un funtor covariante.

(a) Si el límite de F existe, prueba que hay una biyección

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}\left(X, \varprojlim_J F\right) \cong \varprojlim_J \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, F)$$

que es natural en X.

(b) Asumiendo que el colímite de F existe, enuncia y demuestra una biyección natural análoga.